

**Новокузнецкий филиал-институт  
Кемеровского государственного университета**

**Марченко Ю.Н.**

**Конспект лекций по курсу  
«Теории автоматического регулирования»**

**Новокузнецк 2002**

## СОДЕРЖАНИЕ

### **Линейные системы регулирования и управления**

- 1. Элементы систем автоматического регулирования**
  - 1.1. Основные понятия и определения.
  - 1.2. Классификация систем автоматического регулирования
  - 1.3. Понятие передаточной функции
  - 1.4. Типовые звенья
  - 1.5. Структурные схемы
  - 1.6. Эквивалентные структурные преобразования
  - 1.7. Основные принципы регулирования
  - 1.8. Законы регулирования
- 2. Свойства автоматических систем регулирования**
  - 2.1. Устойчивость САР.
  - 2.2. Необходимые условия устойчивости САР.
  - 2.3. Алгебраические критерии устойчивости
  - 2.4. Частотные критерии устойчивости
  - 2.5. Частотные критерии устойчивости
  - 2.6. Оценка качества регулирования
- 3. Пространство состояний в теории управления**
  - 3.1. Понятие состояния
  - 3.2. Матричные передаточные функции
  - 3.3. Переходная матрица состояния

## Линейные непрерывные системы регулирования

### 1. Элементы автоматического регулирования

#### 1.1. Основные понятия и определения

Системы автоматического регулирования отличаются друг от друга физической природой объектов управления, регулирующих и регулируемых (целевых) переменных, типом и конфигурацией управляющих устройств. Однако вне зависимости от различия соответствующих элементов систем автоматического управления они выполняют одинаковые функции. Поэтому для систем автоматического регулирования можно установить *функциональную* схему, которая бы определила основные элементы и их назначение. Такая функциональная структура приведена на рисунке 1.1.

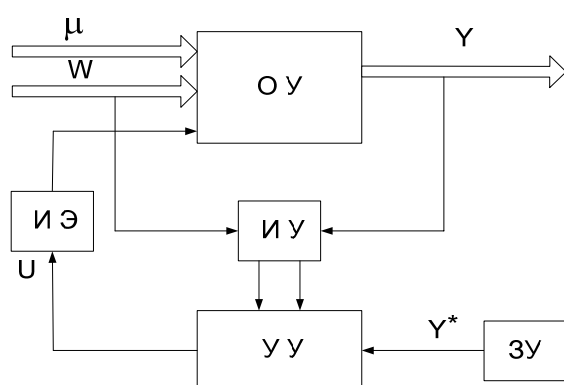


Рисунок 1.1. Общая функциональная структура САУ

Она включает в себя: объект управления (ОУ), измерительное устройство (ИУ), управляющее устройство (УУ) или в простейшем случае - регулятор, исполнительный элемент (ИЭ).

Рассмотрим кратко назначение и свойства элементов системы автоматического регулирования.

*Объект управления (ОУ).* Вследствие большого

разнообразия объектов управления их физическая природа различна. Это могут быть технологические, экономические и организационные объекты и процессы. Различаются также динамические свойства объектов управления. Некоторые объекты обладают так называемым чистым запаздыванием, которое выражается в том, что при изменении нагрузки или управляющего воздействия  $U$  выходная величина изменяется не сразу, а через некоторый промежуток времени. Изучением свойств объектов управления и построением их моделей занимается теория идентификации.

*Исполнительный элемент (ИЭ).* Под исполнительным элементом понимается совокупность элементов системы управления обеспечивающая передачу от управляющего устройства и воздействие на объект управляющего воздействия. Исполнительный элемент может включать в себя исполнительное устройство (исполнительный механизм) и исполнительный орган. Исполнительный орган часто относят к объекту управления. Природа ИЭ определяется природой объекта управления.

*Измерительное устройство (ИУ).* Назначением измерительного уст-

ройства является измерение действительных значений управляющих и возмущающих воздействий. Измерительные устройства могут быть самыми разнообразными в зависимости от природы измеряемых величин. Всякое измерительное устройство является преобразователем измеряемой величины в величину удобную для дальнейшего использования. Измерительное устройство обладает собственными динамическими свойствами и может достаточно сильно исказить измеряемую величину.

*Управляющее устройство (УУ).* Управляющее устройство формирует управляющее воздействие на ОУ в соответствии с заданным алгоритмом управления (законом регулирования) с учетом фактических  $Y$  и заданных  $Y^*$  значений выходной переменной и контролируемых возмущений  $W$ . Управляющее устройство может представлять собой как отдельное специализированное устройство (регулятор) так и комплекс вычислительных средств, решающих задачи идентификации, оценки состояния и оптимизации в темпе с управляемым процессом. В простейших случаях управляющее устройство отсутствует и измерительное устройство выходной переменной непосредственно соединено с исполнительным механизмом (исполнительным органом). Такие системы называются системами автоматического регулирования прямого действия.

*Задающее устройство.* Предназначено для установления необходимого значения управляемой выходной величины. Это значение может устанавливаться либо постоянным, либо формироваться в соответствии с некоторыми правилами, обеспечивающими достижение поставленной цели или как результат решения оптимизационной задачи. Величина на выходе задающего устройства должна быть одинаковой природы с измеренным значением выходной переменной.

## 1.2. Классификация систем автоматического управления

Рассмотренная выше функциональная схема соответствует разнообразным автоматическим системам. Элементы этой функциональной структуры в каждом конкретном случае имеют различное конструктивное исполнение, характеризуются различными динамическими свойствами, характером используемых сигналов.

По способу формирования и передачи сигнала различают автоматические системы управления *непрерывные* и *дискретные*

В непрерывных системах управляющие воздействия представляют собой непрерывные функции времени, в дискретных системах - в отдельные фиксированные моменты времени. Сигнал управления в последнем случае формируется по дискретным значениям выходной переменной и контролируемого возмущения. Эти значения могут соответствовать:

- произвольным значениям сигналов в фиксированные моменты времени (дискретизация по времени – рисунок 1.2а);
- фиксированным значениям в произвольные моменты времени (дискретизация по уровню – рисунок 1.2б);

- фиксированным значениям, ближайшим к произвольным значениям сигнала в фиксированные моменты времени (дискретизация по времени и по уровню- рисунок 1.2в).

Если хотя бы одна переменная, характеризующая состояние системы квантована по времени, то она относится к **импульсным** автоматическим системам, если хотя бы одна переменная, характеризующая состояние системы квантована по уровню, то она относится к **релейным** автоматическим системам, если хотя бы одна переменная, характеризующая состояние системы квантуется по времени и по уровню, то она относится к **цифровым** автоматическим системам.

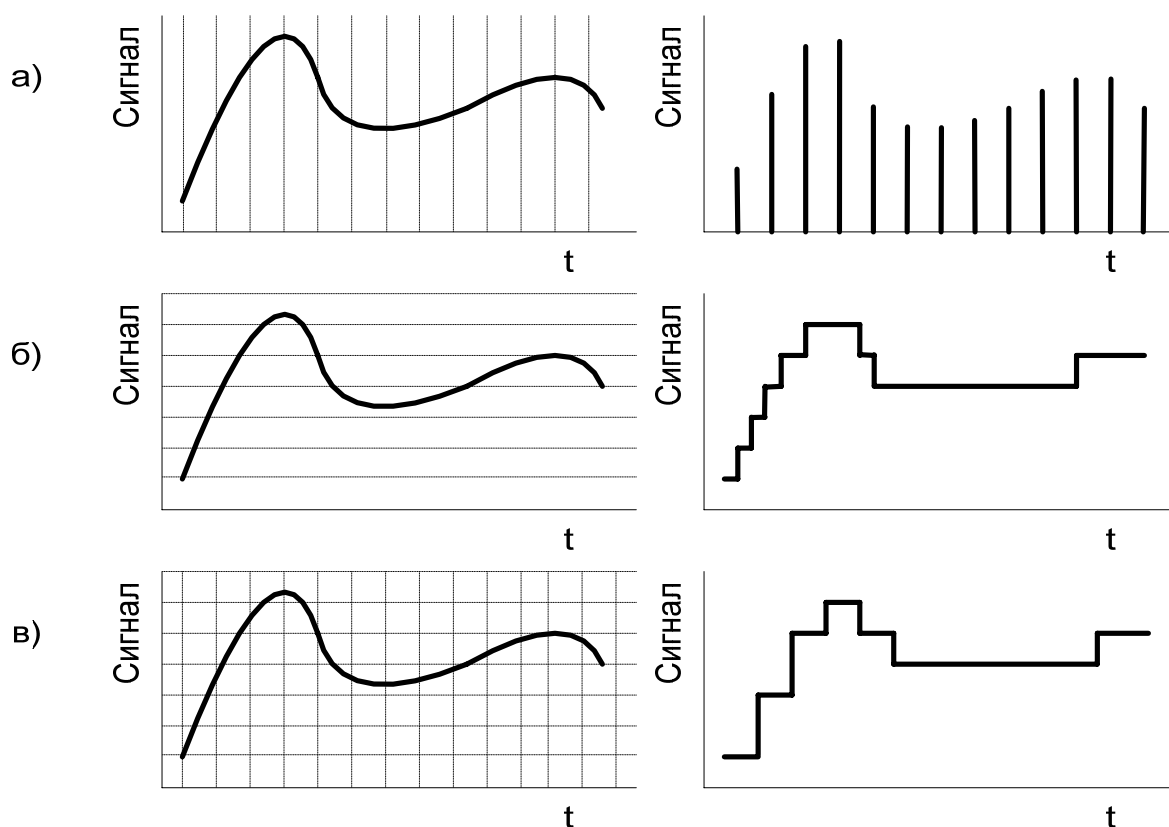


Рисунок 1.2. Дискретизация сигнала

По числу входных и выходных переменных объекта управления различают системы **одномерные** (одна входная переменная, одна выходная переменная – рисунок 1.3а), **многомерные** (несколько входных переменных, несколько выходных переменных – рисунок 1.3б), **множественные** (несколько входных переменных, одна выходная переменная – рисунок 1.3в) или одна входная переменная и несколько выходных переменных.

По возможности изменения структуры различают системы с **постоянной** и **переменной** структурой.

Среди систем с переменной структурой можно выделить системы с переменной структурой регулятора (рисунок 1.4а) и системы с переменной структурой объекта управления (рисунок 1.4б).

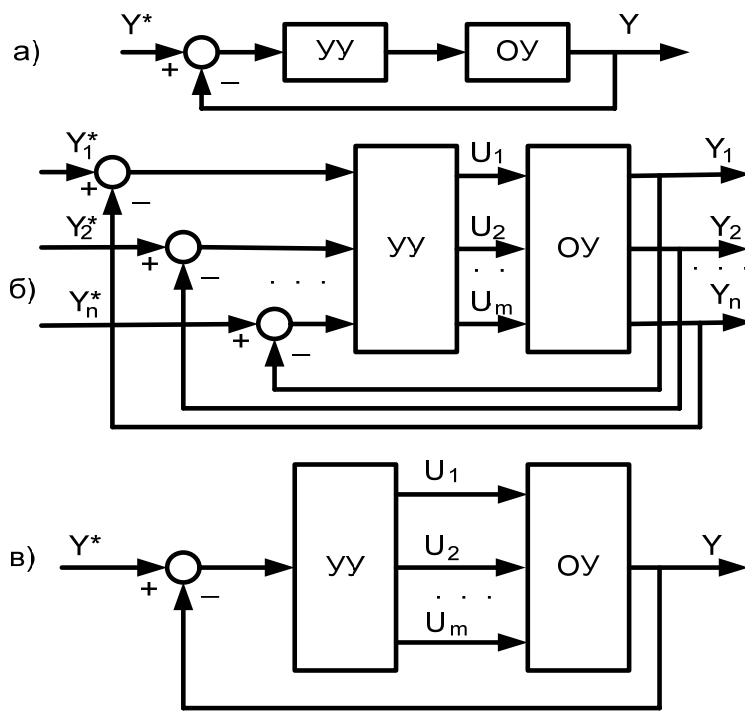


Рисунок 1.3. Структуры систем управления

По характеру сигнала различают **детерминированные** и **стохастические** системы управления. В первом случае все воздействия приложенные к системе детерминированные, во втором случае возмущения носят случайный, непредсказуемый характер

По характеру изменения параметров системы различают **стационарные**

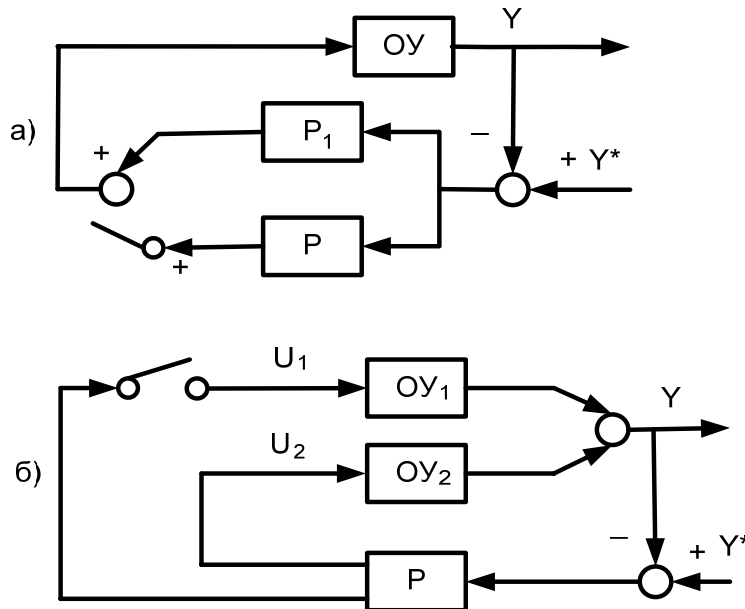


Рисунок 1.4. Системы с переменной структурой

Различают также системы управления **линейные** и **нелинейные**. К линейным

системам управления относятся системы для которых выполняется принцип суперпозиции – реакция системы управления на сумму воздействий равна сумме реакций системы на каждое воздействие. К нелинейным – системы включающие в себя хотя бы один нелинейный элемент – зубчатая передача, усилитель с насыщением, реле с зоной нечувствительности, компаратор и так далее.

и **нестационарные** системы управления. В стационарных системах параметры объектов управления остаются постоянными на рассматриваемом интервале времени. Для нестационарных систем изменением параметров объекта управления на рассматриваемом интервале нельзя пренебречь.

По характеру алгоритма управления различают **неадаптивные** и **адаптивные** системы. Адаптивные системы можно подразделить на **непрямые**

адаптивные системы, **прямые** адаптивные системы и **квазипрямые** адаптивные системы (классификация по Я.З.Цыпкину. Итоги науки и техники. Тех-

ническая кибернетика, т.17, 1984).

В непрямой адаптивной системе управления реализуется оценка параметров объекта по наблюдениям. По этим оценкам на основании соотношений, связывающих параметры оптимального управляющего устройства и объекта, при которых система обладает желаемыми свойствами, определяются параметры управляющего устройства. Структурная схема содержит объект, идентификатор, вычислитель и управляющее устройство (рисунок 1.5).

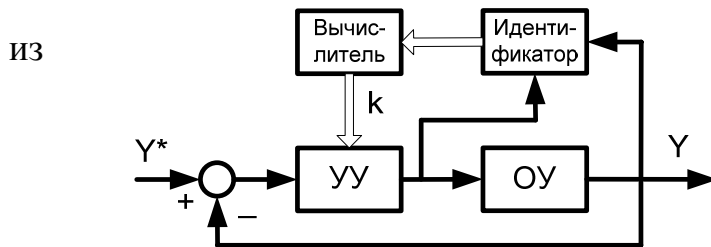


Рисунок 1.5. Структура непрямой адаптивной САР

Идентификатор состоит из настраиваемой модели и алгоритма идентификации, изменяющего параметры модели так, чтобы они являлись оптимальными в определенном смысле оценками параметров объекта. В вычислителе в оптимальные зависимости параметров регулятора от

параметров объекта подставляются вместо этих параметров их оценки и, таким образом определяются параметры управляющего устройства.

В прямых адаптивных системах наблюдения используются для непосредственного изменения параметров управляющего устройства. Структура прямой адаптивной системы приведена на рисунке 1.6. Она включает в себя объект управления, адаптор и управляющее устройство.

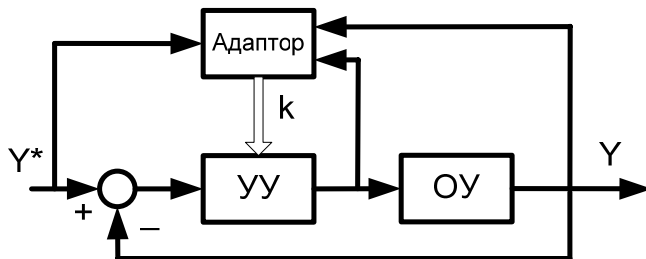


Рисунок 1.6. Структура прямой адаптивной САР

Адаптор состоит либо из инверсной модели управляющего устройства и алгоритма адаптации, либо только из алгоритма адаптации.

Адаптивные системы управления в которых используются иные возможности, отличные от оценивания параметров объекта (идентификации) и непосредственного изменения параметров управляющего устройства, относят к квазипрямым адаптивным устройствам. Структура схема квазипрямой системы (рисунок 1.7) содержит объект управления, предсказатель порядка, меньшего величины запаздывания в объекте, и вычислительное устройство. Предсказатель состоит из моде-

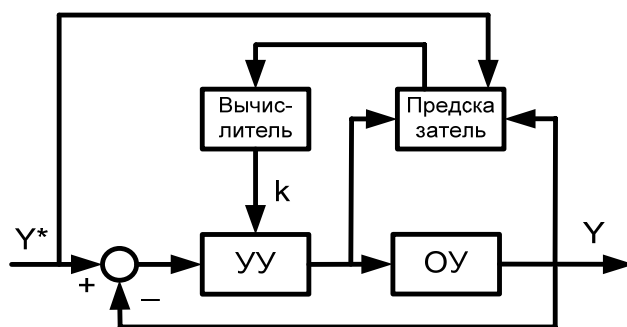


Рисунок 1.7. Структура квазипрямой адаптивной САР

ли предсказания (отличающейся от модели объекта управления и модели управляющего устройства) и алгоритма предсказания, в соответствии с которым находятся оценки некоторых вспомогательных параметров, по которым вычислительное устройство определяет оценки параметров управляющего устройства.

### 1.3. Понятие передаточной функции

Каждый элемент системы регулирования характеризуется направленным воздействием. Он имеет вход, на который воздействует входной сигнал изменяющийся во времени  $f(t)$ . На выходе формируется выходной сигнал  $y(t)$ .

В общем виде связь между входным  $u(t)$  и выходным  $y(t)$  воздействиями может быть задана в виде нелинейного дифференциального уравнения:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y, u^{(k)}, u^{(k-1)}, \dots, u) = 0. \quad (1)$$

Это уравнение описывает не только переходные режимы работы, но и установившиеся. Для этого достаточно положить в уравнении все производные  $u$  и  $y$  равными нулю. Решая уравнение (1) относительно  $y$  получим искомого статическую характеристику:

$$y = f(u). \quad (2)$$

Однако исследование системы автоматического регулирования, имеющей хотя бы один элемент, описывающийся нелинейным уравнением (1) будет сильно усложнено из-за трудностей, связанных с исследованием нелинейных уравнений. Поэтому ограничиваются рассмотрением лишь частного случая уравнения (1), когда функция  $F$  является линейной функцией с постоянными коэффициентами по аргументам:

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y &= \\ &= b_0 u^{(k)} + b_1 u^{(k-1)} + \dots + b_{k-1} u' + b_k u. \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что уравнение (3) может быть получено из (1) в результате линеаризации в окрестностях некоторого базового режима, характеризуемого известной функцией  $y(t)$ , получающейся под действием данного входа  $u(t)$ .

Формально заменим в уравнении (3) символ дифференцирования:

$$y^{(m)} = \frac{d^m}{dt^m} y = p^m y.$$

Тогда можно записать уравнение (3) в виде:

$$a_0 p^n y + a_1 p^{n-1} y + \dots + a_n y = b_0 p^k u + b_1 p^{k-1} u + \dots + b_k u, \quad (4)$$

или:



$$y = \frac{b_0 p^k + b_1 p^{k-1} + \dots + b_k}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} u.$$

Обозначим:

$$G(p) = \frac{b_0 p^k + b_1 p^{k-1} + \dots + b_k}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{A(p)}{B(p)}. \quad (5)$$

Полином  $B(p)$  является характеристическим полиномом дифференциального уравнения (3) и называется характеристическим уравнением элемента системы, описываемого уравнением (3). Функцию  $G(p)$  называют передаточной функцией или оператором элемента системы. Таким образом уравнение (3) принимает простой вид:

$$y = G(p) \cdot u. \quad (6)$$

В данном случае букву  $p$  не нужно понимать как некоторую переменную, которая может принимать числовые значения. Здесь  $p$  нужно понимать как символ (обозначение операции дифференцирования). Правда в характеристическом уравнении буква  $p$  вновь играет роль обычной переменной, которая принимает числовые значения. Такая двусмысленность оправдывается тем, что переход от дифференциального уравнения (3) к «операторной» форме (4) совпадает с непрерывным преобразованием Лапласа уравнения (3) при нулевых начальных условиях.

Запись соотношений между входом и выходом в форме (6) дает значительные преимущества при исследовании систем. В сложных системах автоматического регулирования имеется взаимодействие элементов: выход одного элемента служит входом другого и так далее. Использование понятия передаточной функции позволяет без труда находить связи между любыми двумя переменными.

#### 1.4. Типовые звенья

Функциональное назначение элементов системы не зависит от физической природы регулируемой величины, ни от физической природы аппаратуры, из которой построена система регулирования. Величина  $y(t)$  может быть напряжением, положением осей в следящем приводе или температурой в электропечи.

При изучении систем регулирования с динамической точки зрения в теории регулирования отвлекаются от конкретной физической природы регулируемой величины, от физической природы аппаратуры и изучают только характер процесса регулирования.

С этой точки зрения все элементы (звенья) системы можно разбить по

характеру процессов протекающих в них на:

- пропорциональное (усилительное) звено;
- интегрирующее звено;
- инерционное (апериодическое) звено первого порядка;
- инерционное звено второго порядка (колебательное звено);
- дифференцирующее звено;
- запаздывающее звено;
- интегральное звено с отсечкой.

Эти звенья обычно называют типовыми или элементарными, хотя некоторые из перечисленных звеньев, строго говоря, не являются элементарными, так как могут быть получены из других элементарных блоков. Например, инерционное звено первого порядка может быть представлено как интегральное звено, охваченное отрицательной обратной связью.

Будем условно обозначать звено прямоугольником, к которому подходит входная величина  $f$  и от которого выходит выходная величина  $y$ . Тип звена однозначно определяется законом, связывающим между собой величины  $f$  и  $y$ .

**Пропорциональное звено.** Для этого звена выражение определяющее связь входной и выходной переменных записывается как:

$$y(t) = k \cdot f(t),$$

причем постоянная  $k$  может иметь любое действительное значение, как положительное так и отрицательное. Это звено выполняет следующее преобразование – входной сигнал умножается на постоянную величину  $k$ , которая называется коэффициентом усиления или коэффициентом передачи.

Передающая функция пропорционального звена задается выражением:

$$G(p) = k.$$

Важной характеристикой типового звена является его реакция на единичное входное ступенчатое воздействие:

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

при нулевых начальных условиях:

$$y^{(n-1)}(0) = \dots = y(0) = 0,$$

которая называется переходной функцией.

Переходная функция обозначается  $h(t)$ . График переходной функции

усилительного звена приведен на рисунке 1.8.

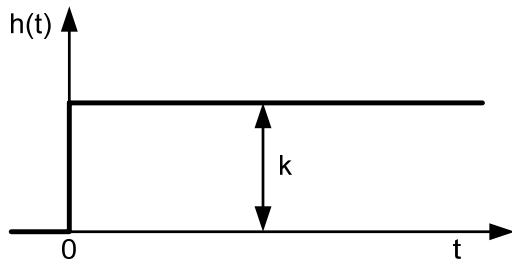


Рисунок 1.8. Переходная функция пропорционального звена

Рассмотрим некоторые примеры пропорциональных звеньев. На рисунке 1.9а схематически изображен усилитель постоянного тока. Пусть его входное напряжение  $u_1$ , а выходное  $u_2$ . Величины входного и выходного напряжения связаны между собой зависимостью  $u_2 = k \cdot u_1$ . Безразмерная постоянная величина  $k$  есть коэффициент усиления звена.

На рисунке 1.9б изображено сопротивление  $R$ , на зажимы которого подано напряжение  $U_2$ . Ток в цепи сопротивления  $J$  равен  $U_2/R$ . Если считать напряжение входной величиной, а ток – выходной, то это звено является усилительным.

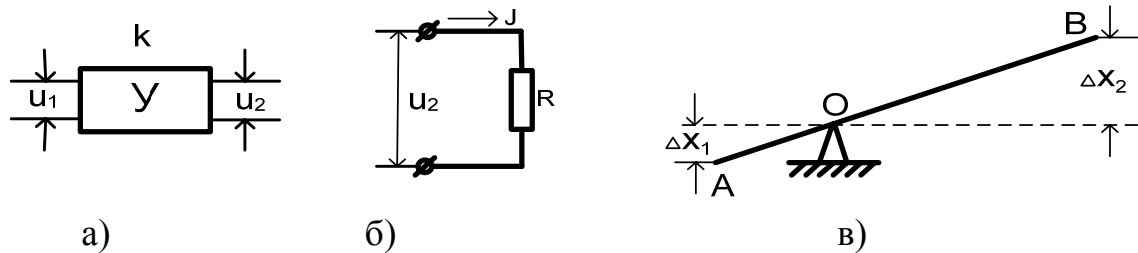


Рисунок 1.9. Примеры пропорциональных звеньев

На рисунке 1.9в изображен рычаг. Пусть вертикальная составляющая перемещения его левого конца  $\Delta X_1$  есть входная величина, вертикальная составляющая перемещения правого конца  $\Delta X_2$  – выходная величина. Тогда  $\Delta X_2 = k \cdot \Delta X_1$  и данное звено является усилительным. Величина  $k$  больше или меньше единицы в зависимости от соотношения плеч  $AO$   $BO$  рычага.

**Интегрирующее звено.** Уравнение звена можно записать следующим образом:

$$\frac{dy(t)}{dt} = k \cdot f(t),$$

то есть выходной сигнал пропорционален интегралу от входного воздействия.

Передаточная функция:  $G(p) = \frac{k}{p}$ .

Реакция интегрирующего звена на входной сигнал  $1(t)$  имеет вид:

$h(t) = k \cdot t$  при  $t \geq 0$  (рисунок 1.10). Таким образом переходная функция интегрирующего звена имеет вид наклонной прямой, исходящей из нуля под

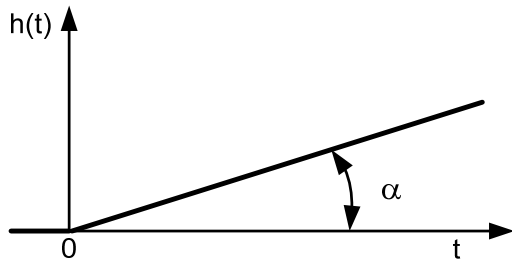


Рисунок 1.10. Переходная функция интегрирующего звена

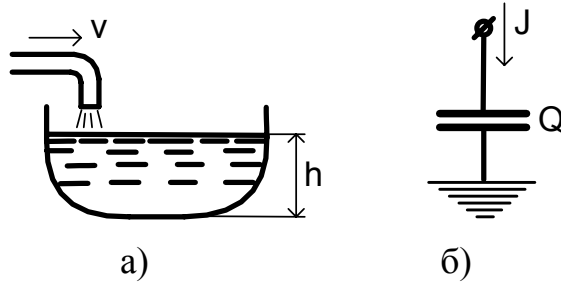


Рисунок 1.11. Примеры интегрирующих звеньев

углом  $\alpha$ , причем  $k = tg \alpha$ .

Примером интегрирующего звена может служить емкость, наполняющаяся жидкостью или электрический конденсатор. «заполняющийся» электрическим зарядом (рисунок 1.11а, 1.11б).

Интегрирующее звено не может находиться в состоянии равновесия при любом постоянном значении входного сигнала. При любом сколь мало отличном от нуля постоянном входном сигнале выходной сигнал может стать через достаточно большое время сколь угодно большим. Единственным положением равновесия этого звена является то, при котором входной сигнал равен нулю. Поэтому интегрирующее звено называют астатическим.

**Дифференцирующее звено.** Уравнение дифференцирующего звена имеет вид:

$$y(t) = k \cdot \frac{df(t)}{dt},$$

то есть выходной сигнал  $y(t)$  пропорционален производной входного сигнала  $f(t)$  с коэффициентом пропорциональности  $k$

Передаточная функция этого звена равна:

$$G(p) = k \cdot p.$$

Переходная функция дифференцирующего звена уже не является функцией в обычном смысле этого слова. В данном случае переходная функция  $h(t)$  есть производная от единичной функции  $1(t)$ . Производной от единичной функции является  $\delta(t)$ -функция, то есть:

$$\frac{d1(t)}{dt} = \delta(t).$$

График переходной функции дифференцирующего звена представлен на рисунке 1.12.

Уравнение переходной функции совпадает с уравнением  $\delta(t)$ -функ-

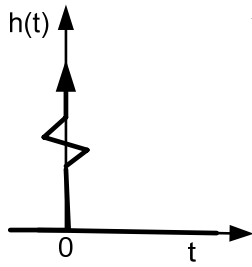


Рисунок 1.12. Переходная функция интегрирующего звена

ции и может быть записано как:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t > 0, t < 0 \\ \infty & \text{при } t = 0 \end{cases} .$$

**Звено запаздывания.** Уравнение звена запаздывания описывается следующим соотношением:

$$y(t) = f(t - \tau), \quad \tau > 0 .$$

Это значит что звено запаздывания выполняет «сдвига» входного сигнала на время  $\tau$  «назад». Выходной сигнал равен входному, но сдвинутому на время запаздывания в прошлое.

Передаточная функция звена запаздывания:

$$G(p) = e^{-p\tau} .$$

Переходная функция звена запаздывания  $h(t) = 1(t - \tau)$ . График функции приведен на рисунке 1.13

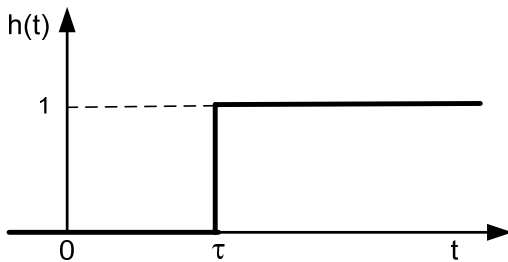


Рисунок 1.13. Переходная функция звена запаздывания

Звено запаздывания иногда называют звеном чистого или транспортного запаздывания. Примером звена запаздывания может служить любой процесс связанный с перемещением (подачей) материала или энергии, в том числе транспортный конвейер (рисунок 1.14), где входное воздействие  $Q_1(t)$  – поток материала поступающий на конвейер, выходная переменная  $Q_2(t)$  – поток

материала уходящий с конвейера. Запаздывание определяется как:

$$\tau = L / v ,$$

где  $L$  – расстояние между местом подачи материала на конвейер и местом его сброса с конвейера;  $v$  – скорость конвейера, уравнение связывающее  $Q_2(t)$  и  $Q_1(t)$ :

$$Q_2(t) = Q_1(t - \tau) .$$

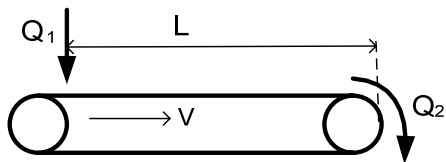


Рисунок 1.14. Транспортный конвейер

**Апериодическое звено (инерционное звено первого порядка).** Уравнение этого звена имеет вид:

$$T \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot f(t),$$

где  $T$  - постоянная времени, имеет размерность времени;  $k$  - коэффициент усиления или коэффициент передачи; Он показывает отношение изменения выходной величины под действием изменения входной величины.

Передаточная функция апериодического звена:

$$G(p) = \frac{k}{T \cdot p + 1}.$$

Переходная характеристика инерционного звена первого порядка является решением уравнения звена при единичном входном воздействии при нулевых начальных условиях:

$$T \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot 1(t),$$

и определяется следующим выражением  $h(t) = k \cdot (1 - e^{-t/T})$ . График переходной характеристики представлен на рисунке 1.15. Такой процесс называется апериодическим, что объясняет название звена.

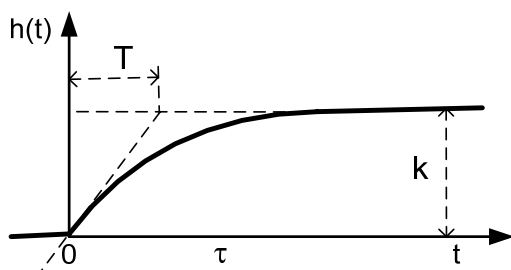


Рисунок 1.15. Переходная функция апериодического звена

Постоянная времени  $T$  (или постоянная времени инерции) определяется как время за которое закончился бы переходный процесс в апериодическом звене под действием ступенчатого возмущения  $f(t)$ , если бы скорость изменения выходной величины была бы максимальной.

В качестве примера апериодического звена можно привести  $RC$  - цепочку (рисунок 1.16), если за входное воздействие принять напряжение  $u_1$ , а за выходной сигнал  $u_2$ . Тогда связь между ними задается уравнением:

$$RC \cdot \frac{du_2(t)}{dt} + u_2(t) = u_1(t).$$

Здесь постоянная времени  $T = RC$ , а коэффициент  $k = 1$ . Размерность постоянной времени  $[RC] = \text{сек}$ . Коэффициент усиления в силу одинаковой природы входного выходного сигналов безразмерен и равен в данном

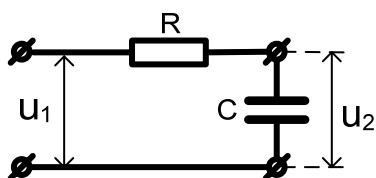


Рисунок 1.16. RC-цепочка

случае единицы.

Другими примерами могут служить нагрев «тонкого» тела («тонкого» в теплотехническом смысле).

**Инерционное звено второго порядка (колебательное звено).** Уравнение инерционного звена второго порядка имеет вид:

$$T_1 \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot f(t).$$

Коэффициент  $T_1 > 0$  имеет размерность квадрата времени [ $c^2$ ],  $T_2 > 0$  имеет размерность времени [ $c$ ], коэффициент усиления имеет размерность [ $y$ ]/[ $f$ ] и называется статическим коэффициентом усиления колебательного звена.

Передающая функция инерционного звена второго порядка:

$$G(p) = \frac{k}{T_1 \cdot p^2 + T_2 \cdot p + 1}.$$

Переходная функция звена является решением уравнения звена при единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях.

В зависимости от соотношения постоянных времени  $T_1, T_2$  возможны два решения:

$$h(t) = k + c_1 \cdot e^{\alpha t} \sin \omega t + c_2 \cdot e^{\alpha t} \cos \omega t,$$

$$h(t) = k + c_1 \cdot e^{p_1 t} + c_2 \cdot e^{p_2 t}.$$

$c_1, c_2$  - константы определяемые начальными условиями.

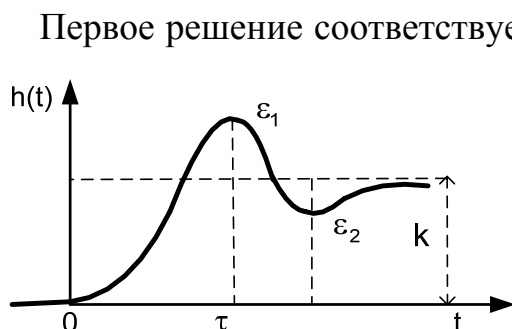


Рисунок 1.17. Переходная функция колебательного звена

Первое решение соответствует переходной функции, имеющей колебательный характер. Значения постоянных времени  $T_1, T_2$  удовлетворяют условию  $T_2^2 - 4 \cdot T_1 < 0$ . График переходной функции инерционного звена второго порядка приведен на рисунке 1.17. По характеру переходной функции (рисунок 1.17) инерционное звено вто-

рого порядка называют колебательным звеном.

Второе решение соответствует условию  $T_2^2 - 4 \cdot T_1 > 0$ . Переходная функция в этом случае будет иметь аperiodический характер (рисунок 1.18).

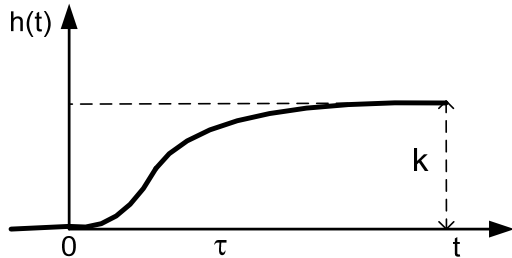


Рисунок 1.18. Переходная функция аperiodического звена второго порядка

$$LC \cdot \frac{d^2 u_2}{dt^2} + RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1.$$

Здесь  $LC = T_1$ ,  $RC = T_2$ ,  $k = 1$ .

**Реальное дифференцирующее звено.** Уравнение реального дифференцирующего звена имеет вид:

$$T \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \cdot \frac{df(t)}{dt}.$$

$T > 0$  называется постоянной времени реального дифференцирующего звена,  $k$  - статический коэффициент усиления.

Передаточная функция реального дифференцирующего звена:

$$G(p) = \frac{k \cdot p}{T \cdot p + 1}.$$

Переходная функция реального дифференцирующего звена является решением следующего уравнения:

$$T \cdot \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \delta(t),$$

и имеет вид:  $h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}}$ . График этой функции приведен на рисунке 1.20.

Переходная функция реального дифференцирующего звена имеет разрыв в точке  $t = 0$ ; при  $t \rightarrow \infty$  функция  $h(t) \rightarrow 0$ .

В качестве примера колебательного звена можно рассмотреть RC-цепочку (рисунок 1.19), если за входной сигнал принять напряжение  $u_1$ , а за выходной - напряжение  $u_2$ . Зависимость между ними задается уравнением:

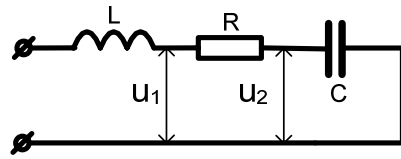


Рисунок 1.19. Пример колебательного звена



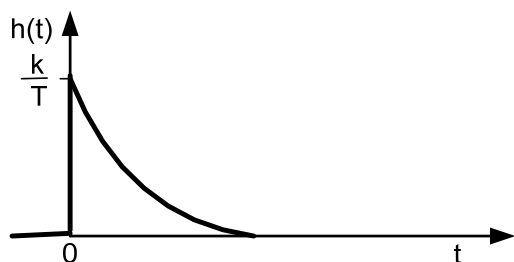


Рисунок 1.20. Переходная функция реального дифференцирующего звена

Примером реального дифференцирующего звена является RC-цепочка (рисунок 1.16), если за входной сигнал принять напряжение  $u_1$ , а за выходной – ток  $J$ . Тогда уравнение связывающее входную и выходную переменную имеет вид:

$$RC \cdot \frac{dJ}{dt} + J = C \cdot \frac{du_1}{dt}.$$

**Интегральное звено с отсечкой.** Уравнение интегрального звена с отсечкой может быть представлено в виде:

$$T \cdot \frac{dy(t)}{dt} = k \cdot [f(t) - f(t - t^{om})],$$

где  $T$  - постоянная времени интегрального звена с отсечкой,  $t^{om}$  - интервал времени отсечки.

Передаточная функция определяется выражением:

$$G(p) = \frac{k}{T \cdot p} e^{-pt^{om}}.$$

Переходная функция интегрального звена с отсечкой:

$$h(t) = \begin{cases} \frac{k}{T}t, & \text{при } 0 < t < t^{om}, \\ \frac{k}{T}t^{om}. & \end{cases}$$

График переходной функции приведен на рисунке 1.21. Примером интегрального звена с отсечкой может служить конвейерный весоизмеритель,

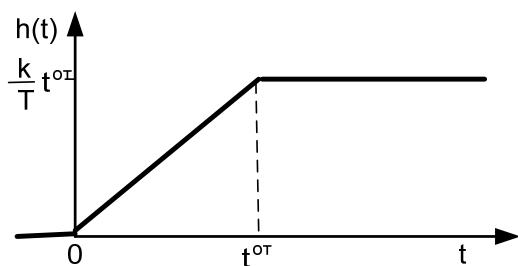
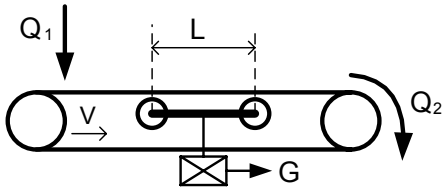


Рисунок 1.21. Переходная функция интегрального звена с отсечкой

если в качестве входного воздействия принять количество материала  $Q_1$  поступающего на конвейер, а выходной переменной – количество материала на участке измерения веса  $G$ . Тогда уравнение связывающее эти две переменные имеет вид:

$$\frac{dG(t)}{dt} = \frac{k}{T} \cdot [Q(t) - Q(t - t^{om})],$$



где  $t^{om} = \frac{L}{v}$ ;  $k$  - коэффициент передачи.

Рисунок 1.14. Транспортный конвейер

## 1.5. Структурные схемы

Отдельные блоки (звенья) систем автоматического регулирования могут быть соединены в различных комбинациях. Различают при основных типа соединения:

- последовательное;
- параллельное;
- антипараллельное (с обратной связью).

Рассмотрим каждое из типов соединения блоков системы.

**Параллельное соединение звеньев.** В этом случае выход первого блока является входом второго блока, выход второго – входом третьего и т.д. (рисунок 1.22).

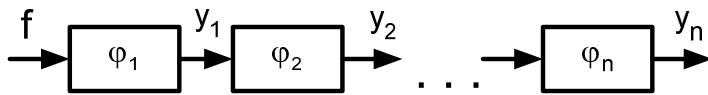


Рисунок 1.22. Последовательное соединение

Найдем передаточную функцию  $G(p)$ , связывающую выход системы  $y_n$  со входом  $f$ . Для каждого блока системы имеем:

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi_1(p) \cdot f, \\ y_2 &= \varphi_2(p) \cdot y_1, \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= \varphi_n(p) \cdot y_{n-1}. \end{aligned}$$

Исключая промежуточные переменные, найдем:

$$y_n = \varphi_1(p) \cdot \varphi_2(p) \cdot \dots \cdot \varphi_n(p) \cdot f = \prod_{i=1}^n \varphi_i(p) \cdot f. \quad (7)$$

Обозначим  $\prod_{i=1}^n \varphi_i(p)$  как  $G(p)$ , тогда уравнение движения выходной

координаты  $y_n$  под действием входной координаты  $f$  будет иметь вид:

$$y_n = G(p) \cdot f. \quad (8)$$

Таким образом определение передаточной функции последовательного соединения звеньев сводится к алгебраической операции перемножения передаточных функций звеньев.

*Пример 1.* Записать уравнение системы, изображенной на рисунке 1.23 при  $\varphi_1(p) = \frac{k_1}{T_1 p + 1}$ ;  $\varphi_2(p) = \frac{k_2}{p}$ ;  $\varphi_3(p) = \frac{k_3 p}{T_2 p + 1}$ .

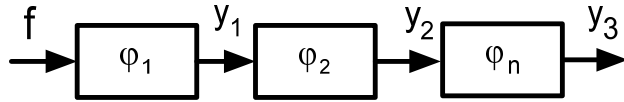


Рисунок 1.23. Пример 3

В соответствии с (7) имеем:

$$G(p) \cdot = \varphi_1(p) \cdot \varphi_2(p) \cdot \varphi_3(p).$$

Или:

$$G(p) \cdot = \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 p}{(T_1 \cdot p + 1)(T_2 \cdot p + 1)p}.$$

С учетом (6) и (8) искомое уравнение можно записать:

$$T_1 T_2 p^3 y_3 + (T_1 + T_2) p^2 y_3 + p y_3 = k_1 k_2 k_3 \cdot p \cdot f.$$

**Параллельное соединение звеньев.** В этом случае на вход всех блоков (рисунок 1.24) подается одно и то же входное воздействие, а выходы блоков суммируются.

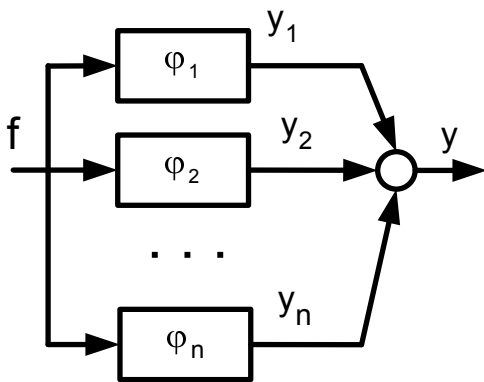


Рисунок 1.24. Параллельное

Имеем:

$$y_1 = \varphi_1(p) \cdot f,$$

$$y_2 = \varphi_2(p) \cdot f,$$

.....

$$y_n = \varphi_n(p) \cdot f.$$

Отсюда складывая почленно все эти равенства, получим:

$$y_n = [\varphi_1(p) + \varphi_2(p) + \dots + \varphi_n(p)] \cdot f = \sum_{i=1}^n \varphi_i(p) \cdot f$$

и, следовательно передаточная функция системы из  $n$  параллельных блоков имеет вид:

$$G(p) = \varphi_1(p) + \varphi_2(p) + \dots + \varphi_n(p). \quad (9).$$

*Пример 2.* Найти передаточную функцию параллельно соединенных дифференцирующего звена и инерционного звена первого порядка.

По формуле (9) имеем:

$$G(p) = k_1 + \frac{k_2}{Tp + 1} = \frac{k_1 Tp + k_1 + k_2}{Tp + 1}.$$

*Примечание.* Если в полученной передаточной функции положить  $k_1 = -k_2$ , тогда:

$$G(p) = \frac{k_1 T \cdot p}{Tp + 1}.$$

Этот пример показывает, что реальное дифференцирующее звено можно получить путем параллельного соединения пропорционального и инерционного звеньев, без непосредственного использования дифференцирующего блока.

*Антипараллельное соединение звеньев.* Часто соединения блоков образуют замкнутый контур, когда входной сигнал блока, проходя через цепочку других блоков возвращается на вход этого же блока. Важным случаем является соединение двух блоков, причем выход первого блока  $\varphi_1(p)$  поступает на вход второго блока  $\varphi_2(p)$ , а его выход суммируется с входом первого блока (рисунок 1.25).

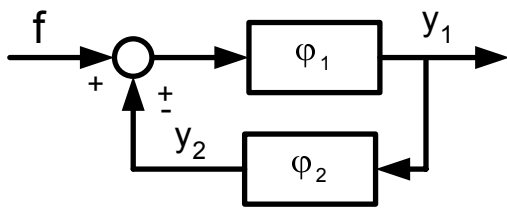


Рисунок 1.25. Антипараллельное соединение звеньев

Здесь входной сигнал  $f$  первого блока  $\varphi_1(p)$  будем считать входом соединения, выход,  $y_1$  соответственно, выходом антипараллельного соединения.

Имеем:

$$y_1 = \varphi_1(p) \cdot (f + y_2),$$

$$y_2 = \varphi_2(p) \cdot y_1,$$

Исключая промежуточную переменную  $y_2$  получим:

$$G(p) = \frac{\varphi_1(p)}{1 \mp \varphi_1(p) \cdot \varphi_2(p)}. \quad (10)$$

Это одна из основных формул структурного метода теории автоматического управления.

Соединение блоков, приведенное на рисунке 1.25 еще называется замкнутой системой с обратной связью, если под  $\varphi_2(p)$  понимается передаточная регулятора. Обратная связь называется положительной, если  $f + y_2$ , и отрицательной, если  $f - y_2$ .

*Пример 3.* Найти передаточную функцию антипараллельного соединения блоков (рисунок 1.26).

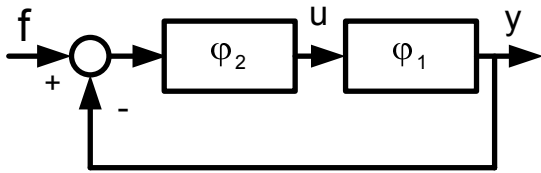


Рисунок 1.26. Соединение с единичной обратной связью

В соответствии с рисунком 1.26 можно записать:

$$y = \varphi_1(p) \cdot \varphi_2(p) \cdot (f - y).$$

Решим это уравнение относительно  $y$ :

$$y = \frac{\varphi_1(p) \cdot \varphi_2(p)}{1 + \varphi_1(p) \cdot \varphi_2(p)} \cdot f.$$

Тогда выражение для передаточной функции замкнутого контура с обратной связью в данном примере будет иметь вид:

$$G(p) = \frac{\varphi_1(p) \cdot \varphi_2(p)}{1 + \varphi_1(p) \cdot \varphi_2(p)}.$$

*Примечание 1.* С учетом изложенного выше, можно сформулировать следующее правило для записи передаточной функции замкнутого контура: передаточная функция замкнутого контура (с обратной связью) определяется как отношение, где в числителе записывается произведение передаточных функций блоков в прямой цепи (от места приложения входного воздействия до выходной переменной), а в знаменателе - единица плюс/минус произведение передаточных функций всех блоков замкнутого контура. Знак плюс ставится для отрицательной обратной связи и минус - для положительной обратной связи.

*Примечание 2.* Случай обратной связи, рассмотренный в примере, называется единичной отрицательной обратной связью.

### 1.6. Эквивалентные структурные преобразования.

В процессе анализа или синтеза структур систем автоматического управления полезно использовать правила преобразования структурных схем с целью их упрощения, выявления их особенностей и облегчения восприятия.

Можно указать два основных правила преобразования структурных схем: перенос точки разветвления и перенос точки суммирования.

#### **Правило переноса точки разветвления.**

1) Если точка разветвления переносится против направления прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить элементы с передаточными функциями всех элементов, встречающихся на пути между прежней и новой точками разветвления (рисунок 1.27).

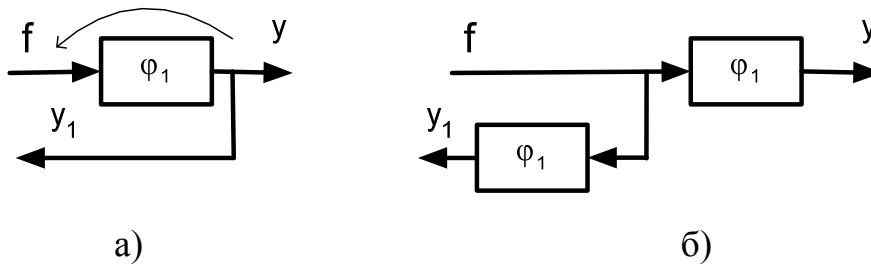


Рисунок 1.27. Перенос точки разветвления против прохождения сигнала

Покажем, что схемы представленные на рисунках 1.27а и 1.27б эквивалентны. Действительно, на рисунке 1.27а:

$$y = \varphi_1(p) \cdot f;$$

$$y_1 = y = \varphi_1(p) \cdot f.$$

и на рисунке 1.27б:

$$y = \varphi_1(p) f,$$

$$y_1 = \varphi_1(p) \cdot f,$$

что и требовалось доказать.

2) Если точка разветвления переносится по направлению прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включить элементы с обратными передаточными функциями всех элементов, встречающихся на пути между прежней и новой точками разветвления (рисунок 1.28).

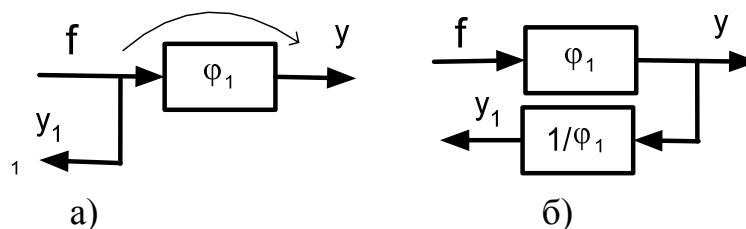


Рисунок 1.28. Перенос точки разветвления по направлению прохождения сигнала

Эквивалентность схем следует из равенства передаточных функций по каналам « $f - y$ », « $f - y_1$ ». Действительно, из рисунка 1.28а:

$$y = \varphi_1(p) \cdot f;$$

$$y_1 = f$$

а из рисунка 1.28б:

$$y = \varphi_1(p) \cdot f;$$

$$y_1 = \frac{1}{\varphi_1(p)} \cdot y = \frac{1}{\varphi_1(p)} \cdot \varphi_1(p) \cdot f = f,$$

что и требовалось доказать.

### **Правило переноса сумматора.**

1) Если точка суммирования переносится по направлению прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включать элементы с передаточными функциями всех элементов, встречающихся на пути между прежней и новой точками суммирования (рисунок 1.29).

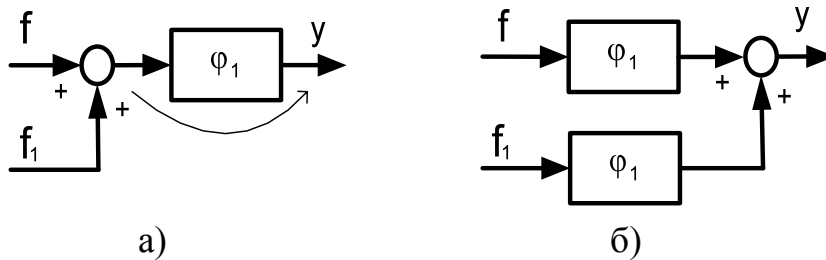


Рисунок 1.29. Перенос сумматора по ходу прохождения сигнала

Схемы на рисунках 1.29а (исходная схема) и 1.29б (конечная схема) эквивалентны, так как равны передаточные функции по каналам « $f - y$ » и « $f_1 - y$ ».

Действительно, из рисунка 1.29а следует:

$$y = \varphi_1(p) \cdot (f + f_1);$$

из рисунка 1.29б:

$$y = \varphi_1(p) \cdot f + \varphi_1(p) \cdot f_1 = \varphi_1(p) \cdot (f + f_1).$$

2) Если точка суммирования переносится против направления прохождения сигнала, то в переносимую ветвь нужно включать элементы с обратными передаточными функциями всех элементов, встречающихся между новой и прежней точками суммирования (рисунок 1.30).

Эквивалентность схем следует из равенства передаточных функций по всем каналам преобразования входных сигналов.

На рисунке 1.30а:

$$y = \varphi_1(p) \cdot f + f_1;$$

На рисунке 1.30б:

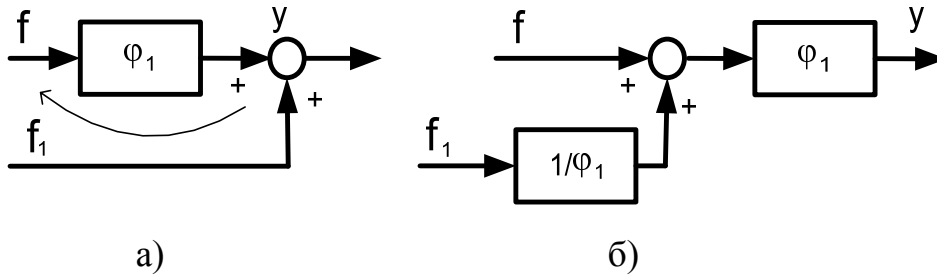
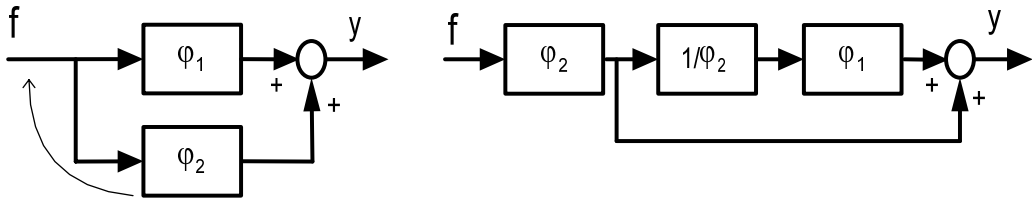


Рисунок 1.30. Перенос сумматора против направления прохождения сигнала

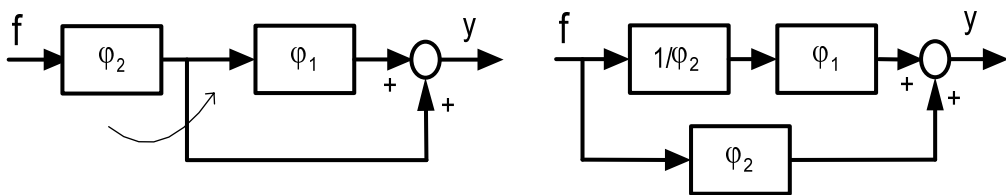
$$y = \varphi_1(p) \cdot \left[ f + f_1 \cdot \frac{1}{\varphi_1(p)} \right] = \varphi_1(p) \cdot f + f_1.$$

**Некоторые типовые структурные схемы и эквивалентные соотношения.** Ниже рассматриваются наиболее часто встречающиеся элементы структурного анализа схем автоматического регулирования.

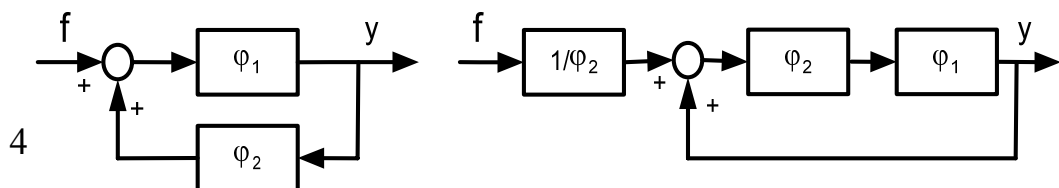
1. Удаление блока из прямой петли.



2. Введение блока в прямую петлю.



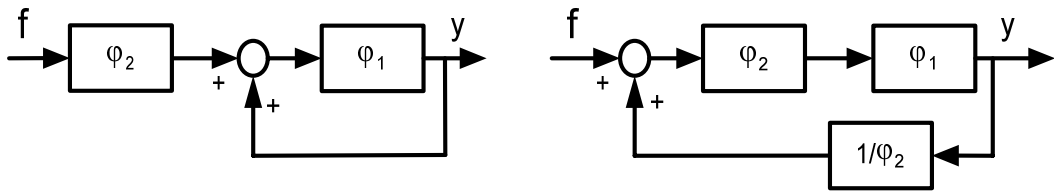
3. Устранение блока из контура обратной связи



4



4. Введение блока в контур обратной связи



1.7. Основные принципы регулирования

В современной теории автоматического регулирования различают четыре принципа регулирования:

- по нагрузке;
- по возмущению;
- по обратной связи;
- комбинированный.

Задача регулирования заключается в выработке таких управляющих воздействий на объект, которые обеспечили бы равенство выходных переменных некоторым заранее известным, задающим воздействиям. Эта задача еще называется задачей стабилизации.

**Регулирование по нагрузке.** Задача регулирования по нагрузке возникает при отсутствии *координатного* возмущения или когда им можно пренебречь и воздействие на объект нужно осуществлять лишь в том случае, когда нужно изменить значение регулируемой величины. Управляющее воздействие формируется как:

$$u^* = \varphi_u^{-1}(p) \cdot y^*, \tag{11}$$

где  $\varphi_u^{-1}(p)$  - оператор обратный оператору объекта управления;  $y^*$  - заданное значение выходной величины.

Если уравнение объекта имеет вид:  $y = \varphi_u(p) \cdot u$ , то после подстановки в него (11) получим:

$$y = \varphi_u(p) \cdot u^* = \varphi_u(p) \cdot \varphi_u(p)^{-1} \cdot y^* = y^* .$$

Принцип регулирования по нагрузке приводит к структурной схеме системы автоматического регулирования приведенной на рисунке 1.31.

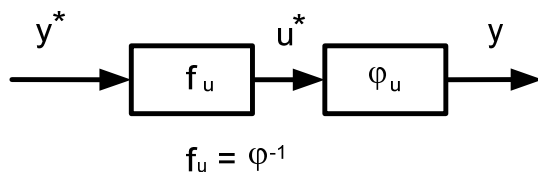


Рисунок 1.31 – Схема САР по нагрузке

При конструировании регулятора  $f_u$  в рассматриваемой системе необходимо знать все свойства объекта управления. Только при этом условии и отсутствии возмущений можно правильно предви-

деть влияние задающего воздействия на регулируемую величину.

Область применения принципа регулирования по нагрузке в «чистом» виде ограничена случаями когда нельзя пренебречь действием возмущений. Неприменим такой подход и в случае неустойчивого или нейтрального объекта управления.

**Регулирование по возмущению.** Различают САУ с контролируемым возмущением и с косвенной оценкой неконтролируемого возмущения.

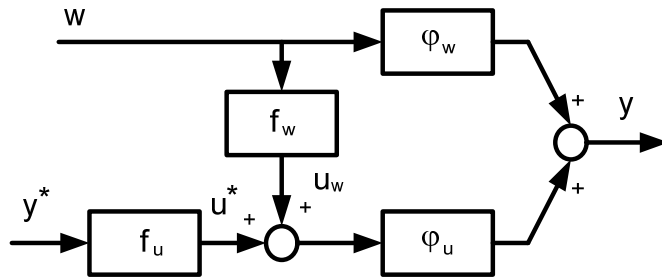


Рисунок 1.32 – Схема САУ по возмущениям

Структура системы автоматического регулирования в первом случае включает еще один элемент- регулятор по контролируемым возмущениям  $f_w$ , в котором формируется компенсирующее воздействие:

$$u_w = f_w(p) \cdot w. \quad (12)$$

Уравнение объекта управления в рассматриваемом случае имеет вид:

$$y = \varphi_u(p) \cdot [u^* + f_w(p) \cdot w] + \varphi_w(p) \cdot w,$$

или, при выполнении условия (11) имеем:

$$y = y^* + \varphi_w(p) \cdot w + \varphi_u(p) \cdot f_w(p) \cdot w. \quad (13)$$

Анализ уравнения (13) дает условие компенсации:

$$\varphi_w(p) + \varphi_u(p) \cdot f_w(p) = 0. \quad (14)$$

Недостатки принципа регулирования по возмущениям:

- как и в предыдущем случае неустойчивые объекты не могут быть стабилизированы с использованием только этого принципа;

- в соответствии с условием компенсации (14) оператор регулятора по возмущениям определяется как:  $f_w(p) = -\varphi_w(p) \cdot \varphi_u^{-1}(p)$ ; поскольку оператор  $\varphi_u(p)$  моделирует реальный процесс, то обратный оператор не всегда осуществим;

- в большинстве случаев отсутствует полная информация о  $\varphi_w(p), \varphi_u(p)$ , что делает невозможным выполнение условия (14).

В обоих случаях – при использовании принципа регулирования по нагрузке или принципа регулирования по возмущениям системы регулирования являются разомкнутыми, в них регулируемая величина не влияет на действие регулятора.

Идею регулирования по косвенно оцениваемому неконтролируемому возмущению можно проиллюстрировать на следующем примере (рисунок 1.33). Пусть  $f^o = 1$  и  $\mu \neq 0$  и  $\mu$  - неконтролируемое возмущение приведенное к входу объекта управления.

Величина регулирующего воздействия  $u$  при  $f^{\circ} = 1$  и  $y^* = 0$  определяется выражением:

$$u = -\mu \cdot \varphi_{\tau}(p),$$

где  $\varphi_{\tau}(p)$  - оператор звена чистого запаздывания. Таким образом, управляющее воздействие в текущий момент времени представляет собой оценку неконтролируемого возмущения, действовавшего в объекте  $\tau$  времени назад.

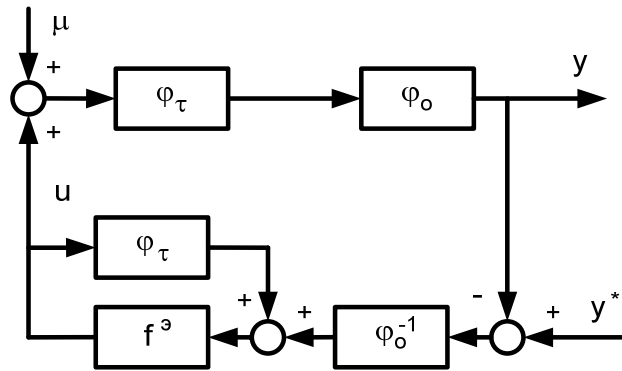


Рисунок 1.33. – Косвенное оценивание возмущения

в

Условия компенсации САР с косвенной оценкой возмущения определяются

следующим образом. Запишем уравнение системы:

$$\begin{aligned} y &= (u + \mu) \cdot \varphi_o(p) \cdot \varphi_t(p); \\ u &= [(y^* - y) \cdot \varphi_o^{-1}(p) + u \cdot \varphi_{\tau}(p) \cdot f^{\circ}(p)]. \end{aligned} \quad (15)$$

Исключая промежуточные переменные получим:

$$y = \varphi_{\tau}(p) \cdot f^{\circ}(p) \cdot y^* + \varphi_o(p) \cdot \varphi_t(p) [1 - f^{\circ}(p) \cdot \varphi_t(p)] \cdot \mu. \quad (16)$$

Тогда  $y = y^*$  обеспечивается при условии:

$$\varphi_{\tau}(p) \cdot f^{\circ}(p) = 1. \quad (17)$$

Или  $f^{\circ}(p) = 1 / \varphi_{\tau}(p) = e^{p\tau}$ , то есть физически нереализуемое звено («идеальный прогнозатор»). В реальной системе выходная переменная всегда будет отличаться от ее заданного значения на величину ошибки прогнозирования.

САР представленная на рисунке 1.33 является разомкнутой при условии, если точно известны  $\varphi_{\tau}(p)$  и  $\varphi_o(p)$ , то есть она относится к разомкнутым САР и отклонение выходной величины не влияет на формирование регулирующего воздействия.

**Регулирование по отклонениям.** В подавляющем большинстве случаев отсутствует исчерпывающая информация о свойствах объекта управления и действующих возмущений и разомкнутые системы регулирования оказываются неэффективными. Поэтому при синтезе САР прибегают к использованию принципа регулирования по отклонениям (с обратной связью). В этом случае отклонения выходной переменной учитываются при расчете регулирующих воздействий. Структура системы управления по отклонениям приведена на рисунке 1.34.

Условие компенсации для рассматриваемого случая определяются аналогично тому как это делалось выше.

Уравнение САР имеет вид:

$$y = \frac{\varphi_o(p) \cdot f_p(p)}{1 + \varphi_o(p) \cdot f_p(p)} \cdot y^* + \frac{1}{1 + \varphi_o(p) \cdot f_p(p)} \cdot \mu. \quad (18)$$

Разделим числитель и знаменатель правой части (18) на  $\varphi_o(p) \cdot f_p(p)$ . Получим:

$$y = \frac{1}{\frac{1}{\varphi_o(p) \cdot f_p(p)} + 1} \cdot y^* + \frac{1}{\frac{1}{\varphi_o(p) \cdot f_p(p)} + 1} \cdot \mu. \quad (19)$$

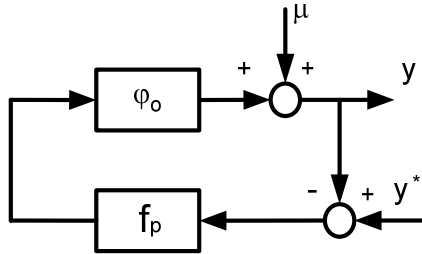


Рисунок 1.34 – САР по отклонениям

Точная реализация заданного значения выходной переменной и полная компенсация возмущающего воздействия будет происходить при условии, что модуль произведения передаточных функций объекта управления и регулятора будет достаточно большим:

$$|\varphi_o(p) \cdot f_p(p)| \gg 1.$$

Тогда выражение (19) можно

записать как  $y \approx y^* \cdot \mu$ . В данном случае некоторое эквивалентное возмущение, приведенное к выходу объекта, включающее в себя эффекты действия всех координатных возмущений как на объект управления так и на регулятор.

Положительными моментами использования принципа регулирования по отклонению является возможность применения для неустойчивых объектов и не предполагается отсутствие или незначительность действующего возмущения.

К недостаткам принципа регулирования по отклонениям относится проблема устойчивости САР с большим коэффициентом усиления регулятора (так называемая глубокая обратная связь). Для объектов с запаздыванием эта проблема становится еще более актуальной.

**Регулирование по комбинированному принципу.** В этом случае присутствует контур регулирования по контролируемым возмущениям  $f_w$ , контур компенсации косвенно оцениваемого возмущения  $f^s, \varphi_o^{-1}, \varphi_\tau$ , контур регулирования по отклонениям  $f_p$  и контур реализации задающего воздействия  $f_y$  (рисунок 1.35). Представленная структура является в достаточной степени обобщенной. В конкретных случаях включение или невключение

контуров в структуру САУ определяется свойствами объекта управления и требованиями, предъявляемыми к качеству регулирования.

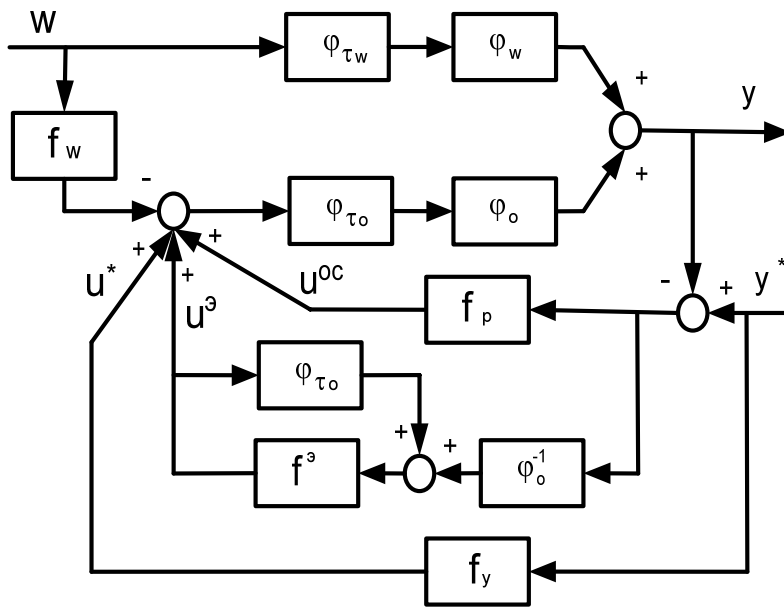


Рисунок 1.35 – Комбинированная САУ

Так контур регулирования по контролируемым возмущениям имеет смысл использовать при наличии контролируемых возмущений на входе объекта управления. Контур регулирования с косвенной оценкой возмущения наиболее эффективен при наличии существенного запаздывания в канале регулирования:

$$\tau / T \gg 1,$$

где  $\tau, T$  - соответственно запаздывание и

постоянная времени в канале регулирования и требуемой длительности переходного процесса два – четыре времени запаздывания. При этом нецелесообразно использовать контур обратной связи, так как запаздывание в канале регулирования превышает его «память».

## 1.8. Законы регулирования

При создании конкретной автоматической системы управления объект задан, то передаточная функция  $\varphi_o(p)$  имеет вполне определенную неизменную форму. Для того, чтобы придать синтезируемой САУ желаемых свойств можно выбирать передаточную функцию регулирующего устройства  $f_p$  (рисунок 1.34).

Рассмотрим типовые управляющие устройства. В зависимости от вида преобразования ошибки регулирующие устройства можно подразделить на три основных типа:

- пропорциональные (П-регуляторы);
- интегральные (И-регуляторы);
- дифференциальные (Д-регуляторы),

а также их сочетания. Например, пропорционально-интегральные (ПИ-регуляторы), пропорционально-дифференциальные (ПД-регуляторы) и так далее. Передаточные функции регулирующих устройств имеют следующий вид.

**Пропорциональные регуляторы:**

$$f_p(p) = k_p.$$

В П-регуляторе управляющее воздействие пропорционально ошибке регулирования  $\varepsilon = y - y^*$ .

**Интегральные регуляторы.**

$$f_p(p) = \frac{k_u}{p}.$$

В интегральном регуляторе регулирующее воздействие пропорционально интегралу от ошибки регулирования.

**Дифференциальные регуляторы.**

$$f_p(p) = k_d \cdot p.$$

В дифференциальном регуляторе регулирующее воздействие пропорционально скорости изменения ошибки регулирования.

**Пропорционально-интегральные регуляторы.**

$$f_p(p) = k_p + \frac{k_u}{p}.$$

В ПИ-регуляторе регулирующее воздействие формируется как сумма пропорциональной и интегральной составляющих регулятора.

Вводя кратное интегрирование и дифференцирование можно получить более сложные законы управления.

## 2. Свойства автоматических систем регулирования

### 2.1. Устойчивость САР

Устойчивость является одним из необходимых условий, обеспечивающих нормальное функционирование автоматических систем. Термин *устойчивость* настолько выразителен, что говорит сам за себя. Однако точное определение устойчивости неэлементарно. «Интуитивное» понятие устойчивости относится в большей степени к линейным системам. Будем говорить, что линейная система устойчива, если ее реакция на любое ограниченное воздействие также ограничена, и неустойчива, если реакция на ограниченные воздействия неограниченна.

Более строгие определения устойчивости будут даны при рассмотрении нелинейных систем.

Рассмотрим вопросы исследования устойчивости линейной системы на примере некоторой САР, описываемой линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y}{dy^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dy^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dy} + a_n y = \\ = b_0 \frac{d^m u}{du^m} + b_1 \frac{d^{m-1} u}{du^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{du}{du} + a_m u \end{aligned} \quad (20)$$

Требуется исследовать устойчивость САР, иными словами требуется исследовать устойчивость данного дифференциального уравнения. Самый простой способ это решение данного уравнения. Решение можно представить в виде суммы:

$$y(t) = y_{\epsilon}(t) + y_{cs}(t), \quad (21)$$

где  $y_{\epsilon}(t)$  - частное решение (20) с правой частью (установившееся решение);  $y_{cs}(t)$  - общее решение уравнения (20) с нулевой правой частью. Частное решение уравнения (20) еще называют вынужденным движением системы, а общее решение дифференциального уравнения (20) собственным или свободным движением системы.

Так как частное решение определяется видом правой части, то устойчивость системы будет определяться общим решением  $y_{cs}(t)$  соответствующего однородного уравнения:

$$a_0 \frac{d^n y}{dy^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dy^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dy} + a_n y = 0.$$

Таким образом устойчивость есть внутреннее свойство системы, не зависящее от внешних воздействий.

Общее решение однородного уравнения (20) можно записать в виде:

$$y_{св}(t) = \sum_{i=1}^n c_i g_i(t) \cdot e^{p_i t}, \quad (22)$$

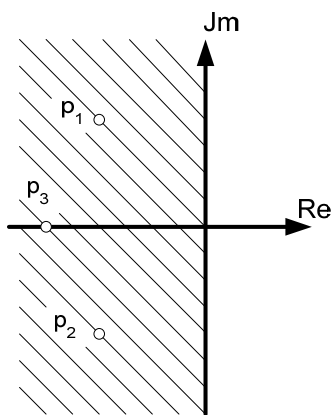
где  $c_i$  - произвольные постоянные, определяемые начальными условиями дифференциального уравнения (20);  $p_i$  - корни характеристического уравнения;  $g_i$  - полином от  $t$ , степень которого меньше кратности соответствующего корня  $p_i$ . В общем случае корень  $p_i$  комплексный:  $p_i = \alpha_i \pm j\beta_i$  и соответствующее ему слагаемое в (22) при отсутствии кратных корней имеет вид:

$$c_i g_i e^{p_i t} = c_i e^{\alpha_i t} (\cos \beta_i t + j \sin \beta_i t).$$

Отсюда видно, что при  $\alpha_i < 0$   $c_i e^{\alpha_i t} \rightarrow 0$ , при  $t \rightarrow \infty$ . Поэтому для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отрицательные действительные части. Это условие соответствует асимптотической устойчивости системы.

Если корни характеристического уравнения изображать соответствующими точками на комплексной плоскости, то ясно что для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения лежали в левой полуплоскости (строго слева от мнимой оси), как это представлено на рисунке 2.1.

Таким образом, для того чтобы определить устойчива данная система



или нет, вообще говоря нет необходимости в точности знать действительные части всех корней и уметь их вычислять. Вполне достаточно располагать лишь сведениями о знаке действительных частей этих корней. Далее рассмотрим простые критерии, которые по виду характеристического уравнения позволили бы судить об устойчивости системы.

Рисунок 2.1 – Расположение корней на комплексной плоскости

## 2.2. Необходимые условия устойчивости САР

Можно легко указать необходимый признак устойчивости системы. Для устойчивости системы необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения были положительными. Это условие можно назвать тривиальным. Действительно, пусть  $p_1, p_2, \dots, p_n$  корни характеристиче-



ского уравнения устойчивой системы. Характеристическое уравнение можно записать в виде:

$$a_0(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) = 0. \quad (23)$$

Если  $p_i = \alpha_i$  - действительный корень, то в силу устойчивости системы  $\alpha_i < 0$ . Тогда в сомножителе  $p - p_i = p - \alpha_i$  в уравнении (23) все коэффициенты положительны. Если  $p_i = \alpha_i \pm j\beta_i$  - комплексный корень и  $\alpha_i < 0$  в силу устойчивости системы, то пара сомножителей

$$(p - p_i)(p - p_k) = (p + \alpha)^2 + \beta^2 = 0$$

также будет иметь положительные коэффициенты. Отсюда следует, что после раскрытия скобок в (23) и приведения его к виду:

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 \quad (24)$$

все коэффициенты будут положительны.

Таким образом если система устойчива, то все коэффициенты характеристического уравнения должны быть строго положительны. Если хотя бы один коэффициент будет отрицательным или равным нулю, то можно сразу сказать, что система неустойчива. Таким образом неположительность хотя бы одного коэффициента характеристического уравнения гарантирует неустойчивость системы, однако обратное, вообще говоря, неверно, то есть положительность всех коэффициентов уравнения есть необходимое и достаточное условие лишь для систем первого и второго порядков. Уже для систем третьего порядка положительность коэффициентов характеристического уравнения недостаточна для устойчивости системы.

Для систем выше второго порядка положительность коэффициентов характеристического уравнения является необходимым, но не достаточным условием устойчивости. Если все коэффициенты характеристического уравнения положительны, то все вещественные корни отрицательные, но среди комплексных корней могут быть и корни с положительной вещественной частью.

Если хотя бы один коэффициент отрицателен, то система заведомо неустойчива. При равенстве нулю коэффициента  $a_n$  система находится на границе устойчивости. При равенстве нулю любого другого коэффициента система находится либо на границе устойчивости, либо неустойчива.

На практике для упрощения расчетов устойчивость САР определяют с помощью критериев устойчивости. Критерий устойчивости – это правило, позволяющее выяснить устойчивость системы без вычисления корней характеристического уравнения. Рассматриваются коэффициенты характеристического уравнения или их функции. Критерии устойчивости разделяют на алгебраические и частотные. К алгебраическим относят критерии Гурвица, Лянара-Шипара и Раусса, к частотным – Критерий Михайлова и Найквиста.

### 2.3. Алгебраические критерии устойчивости

Из алгебраических критериев устойчивости чаще используются критерии Гурвица и Раусса. Критерий Гурвица удобен для устойчивости систем третьего и четвертого порядка, когда известны параметры системы. Кроме того он позволяет получить аналитическое выражение для исследования влияния какого – либо параметра на устойчивость системы.

Критерий Раусса широко используют для определения устойчивости систем высокого порядка, если известны коэффициенты характеристического уравнения. Этот критерий удобен для использования на ЭВМ.

**Критерий устойчивости Гурвица.** Критерий определяет необходимые и достаточные условия устойчивости системы любого порядка. Критерий формулируется следующим образом. Из коэффициентов характеристического уравнения (24) составляется квадратная матрица с  $n$  строками и  $n$  столбцами:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \cdots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \cdots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \cdots \end{vmatrix}.$$

Правило составления матрицы Гурвица простое – первая строка заполняется коэффициентами с нечетными индексами, а вторая – коэффициентами с четными индексами. Дальнейшие строки отличаются от первой пары смещением вправо на один, два, три и так далее столбца. Все коэффициенты с индексами, большими степени, заменяются нулями.

Критерий Гурвица формулируется следующим образом: *для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при  $a_0 > 0$  все определители Гурвица, составленные из коэффициентов характеристического уравнения замкнутой системы, были бы положительны.*

Т.е. чтобы

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \quad (25)$$

$$\Delta_{n-1} > 0, \quad \Delta_n = a_n \cdot \Delta_{n-1} > 0.$$

Условия устойчивости Гурвица остаются справедливыми и для характеристического уравнения, записанного в виде:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0,$$

поскольку корни этого уравнения будут взаимно обратны корням уравнения (24), а это не изменяет знака их действительных частей.

Система находится на границе устойчивости если  $\Delta_n = 0$  и все предыдущие определители в (25) положительны. Это условие распадается на два:  $a_n = 0$  (апериодическая граница устойчивости) и  $\Delta_{n-1} = 0$  (колебательная граница устойчивости).

**Критерий устойчивости Раусса.** Применение критерия требует составления таблицы Раусса (таблица 2.1):

Таблица 2.1 – Таблица Раусса

| № строки | № столбца |          |          |     |   |
|----------|-----------|----------|----------|-----|---|
|          | 1         | 2        | 3        | ... |   |
| 1        | $a_0$     | $a_2$    | $a_4$    | ... | 0 |
| 2        | $a_1$     | $a_3$    | $a_5$    | ... | 0 |
| 3        | $c_{11}$  | $c_{12}$ | $c_{13}$ | ... | 0 |
| 4        | $c_{21}$  | $c_{22}$ | $c_{23}$ | ... | 0 |
| ...      | ...       | ...      | ...      | ... | 0 |

Элементами первой строки являются четные коэффициенты характеристического уравнения, начиная с  $a_0$ . Элементы второй строки – нечетные коэффициенты, начиная с  $a_1$ . Элементы  $c_{11}, c_{12}, \dots$  определяются следующим образом:

$$c_{11} = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{a_1}, c_{12} = \frac{a_1 \cdot a_4 - a_0 \cdot a_5}{a_1}, \dots$$

$$c_{21} = \frac{c_{11} \cdot a_2 - a_0 \cdot a_3}{c_{11}}, c_{22} = \frac{c_{11} \cdot a_4 - a_0 \cdot c_{12}}{c_{11}}, \dots$$

...

Заполнение таблицы Раусса прекращается если в первом столбце встретится отрицательный или нулевой коэффициент. В этом случае можно сделать вывод что система неустойчива или устойчива.

*Пример.* Исследовать устойчивость замкнутой САР с единичной обратной связью. Передаточные функция объекта регулирования задана в виде инерционного звена первого порядка, передаточная функция регулирующего устройства – в виде пропорционально-интегрального закона регулирования. Коэффициенты объекта регулирования:  $k_o = 1,6; T_o = 3c$ , коэффициенты регулятора:  $k_n = 0,5; k_u = 0,04$ .

Передаточная функция замкнутой САР имеет вид:

$$G(p) = \frac{k_o (k_n p + k_u)}{(Tp + 1)p + k_o (k_n p + k_u)}$$

Характеристическое уравнение:

$$Tp^2 + (1 + k_o k_n) p + k_o k_u = 0.$$

Подставим значения коэффициентов и после преобразований получим:

$$3p^2 + 1,8p + 0,064 = 0.$$

Составим таблицу Раусса.

Таблица 2.1 – Пример исследования устойчивости по критерию Раусса

| № строки | № столбца |       |   |
|----------|-----------|-------|---|
|          | 1         | 2     | 3 |
| 1        | 3,0       | 0,064 | 0 |
| 2        | 1,8       | 0     | 0 |
| 3        | 0,064     | 0     | 0 |
| 4        | 0         |       |   |

Все элементы первого столбца положительны, следовательно САР устойчива.

*Пример 2.* Определить условия устойчивости по  $k_u$  для одноконтурной САР, рассмотренной в предыдущем примере.

Характеристическое уравнение САР имеет вид:

$$3p^2 + 1,8p + 1,6k_u = 0.$$

Составим определитель Гурвица

$$\begin{vmatrix} 1,8 & 0 \\ 3,0 & 1,6k_u \end{vmatrix}.$$

Условия устойчивости одноконтурной САР записываются как:

$$1,8 \cdot 1,6k_u - 3,0 \cdot 0 > 0 \Rightarrow k_u > 0,$$

т.е. САР будет устойчива при любых положительных значениях  $k_u$ . При  $k_u = 0$  соответствует апериодической границе устойчивости системы.

## 2.4. Частотные критерии устойчивости

Прежде чем рассматривать частотные критерии устойчивости введем понятие частотных характеристик системы регулирования.

Пусть на вход линейной одномерной системы регулирования приложено гармоническое воздействие с амплитудой  $A_0$  и частотой  $\omega$ :

$$f(t) = A_0 \sin \omega \cdot t,$$

то и выходная переменная, вообще говоря, через некоторое время в установившемся режиме начнет изменяться по строго гармоническому закону, но с другой амплитудой  $A_1$  и фазой  $\vartheta_1$ .

$$y(t) = A_1 \sin(\omega \cdot t + \mathcal{G}_1).$$

Величины  $A_1$  и  $\mathcal{G}_1$  при неизменной амплитуде  $A_0$  входного сигнала зависят от частоты  $\omega$ .

Очевидно, что каждой фиксированной частоте входного гармонического сигнала будет соответствовать свое определенное значение амплитуды и фазы выходного сигнала.

Пусть система описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y &= \\ &= b_0 u^{(m)} + b_1 u^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} u' + a_m u \end{aligned} \quad (26)$$

а входное воздействие  $u$  изменяется по гармоническому закону. Для удобства мы будем его записывать в комплексной форме:

$$u(t) = A_0 \cdot e^{j\omega t}. \quad (27)$$

Тогда выходная переменная  $y$  также может быть представлена на комплексной плоскости в виде:

$$y(t) = A_1(\omega) \cdot e^{j[\omega t + \mathcal{G}_1(\omega)]}. \quad (28)$$

Математически это означает, что функция  $y$ , определенная выражением (28) есть частное решение неоднородного дифференциального уравнения (26). Это решение соответствует вынужденной составляющей решения уравнения, полученной под действием вынуждающей правой части. Подставляя (27) и (28) в (26) получим:

$$\begin{aligned} a_0 (j\omega)^{(n)} A_1(\omega) e^{j[\omega t + \mathcal{G}_1(\omega)]} + a_1 (j\omega)^{(n-1)} A_1(\omega) e^{j[\omega t + \mathcal{G}_1(\omega)]} + \dots \\ \dots + a_n A_1(\omega) e^{j[\omega t + \mathcal{G}_1(\omega)]} = b_0 (j\omega)^{(m)} A_0(\omega) e^{j\omega t} + \dots + b_m A_0(\omega) e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда легко находим:

$$\begin{aligned} \frac{y(t, \omega)}{u(t, \omega)} &= \frac{A_1(\omega) \cdot e^{j[\omega t + \mathcal{G}_1(\omega)]}}{A_0 e^{j\omega t}} = A(\omega) e^{j\mathcal{G}(\omega)} = \\ &= \frac{a_0 (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 (j\omega)^m + b_1 (j\omega)^{m-1} + \dots + b_m} = \frac{K(j\omega)}{D(j\omega)} = G(j\omega) \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь входной и выходной сигналы обозначены как функции от частоты.

Функция  $G(j\omega)$  называется комплексной *частотной характеристикой* системы или комплексной *амплитудно-фазовой (частотной) характеристикой* (АФХ).

Из соотношения (30) видно, что АФХ системы может быть получена из передаточной функции системы заменой  $p = j\omega$ . Полученная функция является отношением выходного гармонического сигнала к входному гармоническому сигналу в комплексном виде в зависимости от частоты гармонического сигнала.

Представим функцию  $G(j\omega)$  в полярных координатах:

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\vartheta(\omega)},$$

где

$$A(\omega) = |G(j\omega)|, \quad \vartheta(\omega) = \arg G(j\omega).$$

Функция  $A = A(\omega)$  называется *амплитудно-частотной характеристикой* системы и представляет собой отношение амплитуды установившегося выходного сигнала к амплитуде входного сигнала при частоте  $\omega$ .

Функция  $\vartheta = \vartheta(\omega)$  называется *фазо-частотной характеристикой*. Она показывает связь между сдвигом по фазе между входным и выходным сигналами в зависимости от частоты входного сигнала.

Как комплекснозначную функцию действительной переменной  $\omega$  функции  $G(j\omega)$  можно представить в виде:

$$G(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где  $P(\omega) = \operatorname{Re} G(j\omega)$ ,  $Q(\omega) = \operatorname{Im} G(j\omega)$ .

Функция  $P(\omega)$  называется *вещественной частотной характеристикой* системы,  $Q(\omega)$  - *мнимой частотной характеристикой* системы.

При каждой фиксированной  $\omega$  функция  $G(j\omega)$  однозначно определяет точку на комплексной плоскости с декартовыми координатами  $P(\omega)$ ,  $Q(\omega)$  или полярными координатами  $A(\omega)$ ,  $\vartheta(\omega)$ . Легко увидеть, что амплитудная, фазовая, вещественная и мнимая частотные характеристики выражаются друг через друга посредством следующих соотношений:

$$P(\omega) = A(\omega) \cdot \cos \vartheta(\omega)$$

$$Q(\omega) = A(\omega) \sin \vartheta(\omega) \quad ,$$

и наоборот:

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\vartheta(\omega) = \arg \operatorname{tg} \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \quad .$$

Частотные характеристики системы могут определяться не только на основании знания передаточной функции системы или уравнений движения системы. Они также могут быть определены и экспериментально, что имеет большое практическое значение, так как на практике не всегда известны передаточные функции и уравнения, описывающие движение системы.

Комплексную частотную характеристику системы  $G(j\omega)$  можно изобразить на комплексной плоскости в виде годографа вектора  $G(j\omega)$  в зависимости от частоты  $\omega$ , которая играет роль параметра, изменяющегося от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Заметим, что в противоположность векторам  $x(t, \omega)$  и  $u(t, \omega)$  вектор  $G(j\omega)$  не зависит от времени. Часть годографа  $G(j\omega)$ , соответствующая изменению  $\omega$  от 0 до  $-\infty$ , будет симметрична части годо-

графа, соответствующего изменению  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ , относительно действительной оси. Поэтому на графике обычно отображается лишь годограф, соответствующий изменению  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ .

*Пример 1.* Аperiodическое звено. Передаточная функция аperiodического звена имеет вид:

$$G(p) = \frac{k_o}{T_o p + 1}.$$

Следовательно имеем:

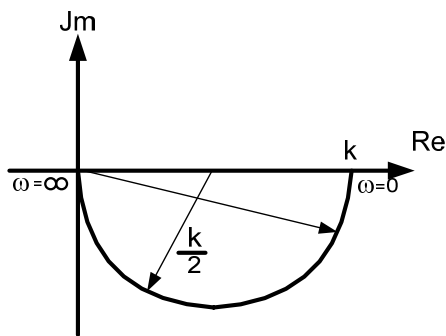
$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{k_o}{T_o j\omega + 1} = -\frac{k_o (T_o j\omega - 1)}{(T_o \omega)^2 + 1} = \frac{k_o}{(T_o \omega)^2 + 1} - j \frac{k_o T_o \omega}{(T_o \omega)^2 + 1} = \\ &= \frac{k_o}{\sqrt{(T_o \omega)^2 + 1}} e^{-j \arctg T_o \omega} \end{aligned}$$

Отсюда получим:

$$A(\omega) = \frac{k_o}{\sqrt{(T_o \omega)^2 + 1}}; \quad \vartheta(\omega) = -\arctg T_o \omega;$$

$$P(\omega) = \frac{k_o}{(T_o \omega)^2 + 1}; \quad \vartheta(\omega) = -\frac{k_o T_o \omega}{(T_o \omega)^2 + 1}.$$

Годограф вектора  $G(j\omega)$  изображен на рисунке 2.2. Как видно из рисунка, годограф аperiodического звена первого порядка представляет собой



полуокружность радиуса  $k/2$  с центром в точке  $(k/2, 0)$ . Амплитудная, фазовая, вещественная и мнимая частотные характеристики приведены на рисунке 2.3.

Рисунок 2.2 - Годограф

## 2.5. Частотные критерии устойчивости

**Критерий Михайлова.** Критерий предполагает построение годографа Михайлова, то есть кривой которую описывает конец вектора  $D(j\omega)$  на комплексной плоскости при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$ . Вектор  $D(j\omega)$  получается из характеристического полинома замкнутой системы при подстановке  $p = j\omega$ :

$$D(j\omega) = a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-1}(j\omega) + a_n = \\ = P(\omega) + j \cdot Q(\omega)$$

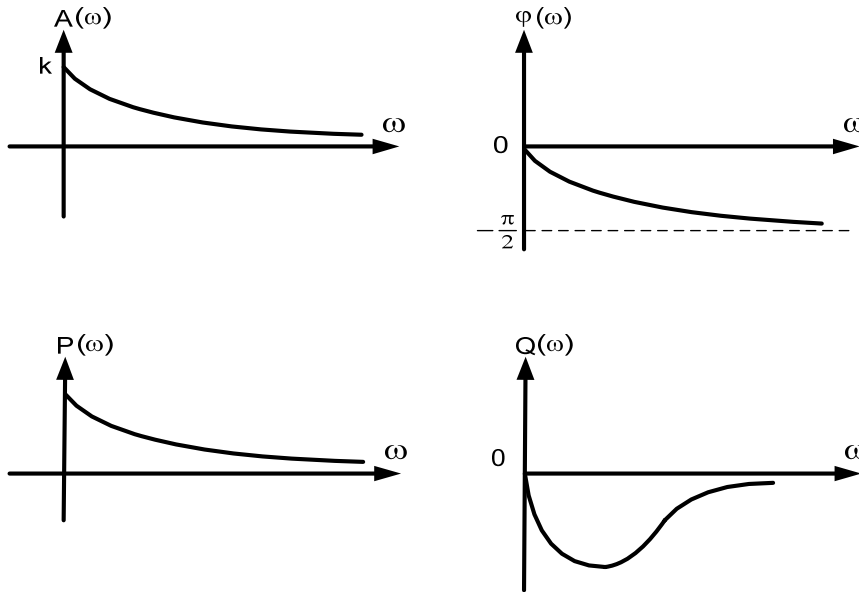


Рисунок 2.3 – Частотные характеристики аperiodического звена

$$\psi = n\pi / 2 - l\pi,$$

где  $n$  - степень характеристического полинома;  $l$  - число его корней с положительной вещественной частью.

Следовательно, для устойчивости системы  $n$ -ого порядка необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова обошел в положительном направлении (против часовой стрелки) последовательно  $n$  квадрантов, нигде не обращаясь в ноль.

Примерный вид годографов Михайлова устойчивых систем первого – пятого порядков показан на рисунке 2.4.

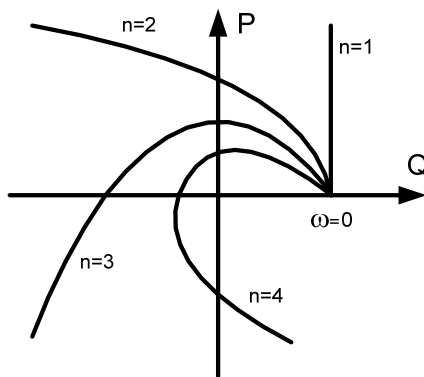


Рисунок 2.4 – Годографы Михайлова устойчивых систем

Годограф начинается при  $\omega = 0$  на вещественной положительной полуоси в точке  $a_n$  и при  $\omega = \infty$  уходит в бесконечность в соответствующем квадранте. Угол поворота вектора  $D(j\omega)$  определяется выражением:

Если система на границе устойчивости, то годограф проходит через начало осей координат так, что после небольшой его деформации около начала осей координат критерий удовлетворяется. Годографы системы четвертого порядка, находящейся на границе устойчивости, показаны на рисунке 2.5. На рисунке 2.4б характеристический полином имеет пару чисто мнимых корней (колебательная граница устойчивости), во втором (рисунок 2.5а) – нулевой корень (апериоди-



ческая граница устойчивости).

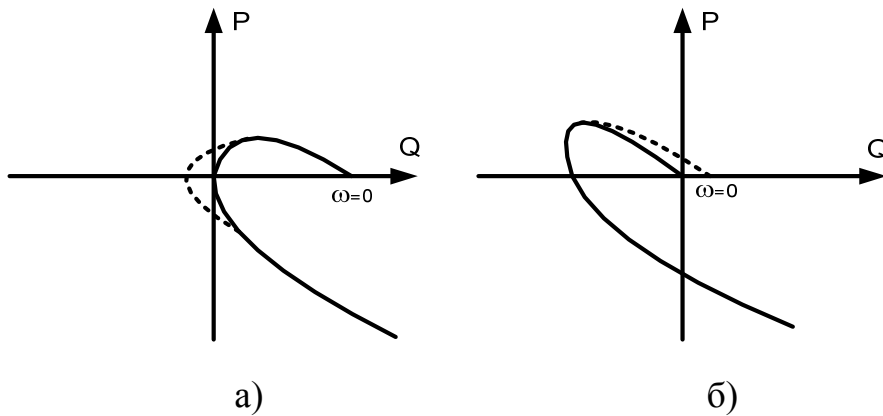


Рисунок 2.5 – Годографы систем на границе устойчивости

Рассмотрим годографы неустойчивых систем четвертого порядка (рисунок 2.6). Характеристический полином системы четвертого порядка может иметь, например, один положительный вещественный корень (кривая 1), два положительных вещественных

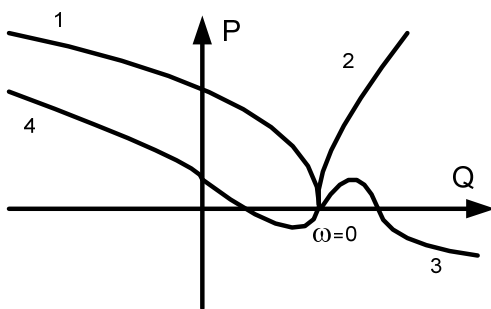


Рисунок 2.6 – Годографы Михайлова неустойчивых систем

корня (кривая 2), два комплексно-сопряженных корня с положительной вещественной частью (кривая 3), два чисто мнимых корня и положительный вещественный корень (кривая 4). В последнем случае годограф проходит через начало осей координат, но небольшая деформация его не приводит к удовлетворению критерия.

*Пример.* Исследовать на устойчивость одноконтурную САР с единичной обратной связью. Передаточные функции звеньев прямой цепи:

$$\varphi_0(p) = \frac{k_0}{T_0 p + 1} e^{-p\tau_0}, \quad f_p(p) = k_1 + \frac{k_2}{p}.$$

При  $k_0 = 1,6; T_0 = 3c; \tau_0 = 5c; k_1 = 0,5; k_2 = 0,04$ .

Характеристическое уравнение замкнутой системы будет иметь вид:

$$Tp^2 + (1 + k_0 k_1)p \cdot e^{-p\tau_0} + k_2 e^{-p\tau_0} = 0.$$

Подставим  $p = j\omega$ , определим  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$ :

$$P(\omega) = -T\omega^2 + k_0 k_1 \sin \omega\tau_0 + k_2 \cos \omega\tau_0,$$

$$Q(\omega) = \omega + k_0 k_1 \omega \cdot \cos \omega\tau_0 + k_2 \sin \omega\tau_0.$$

Годограф Михайлова для рассматриваемой системы приведен на ри-

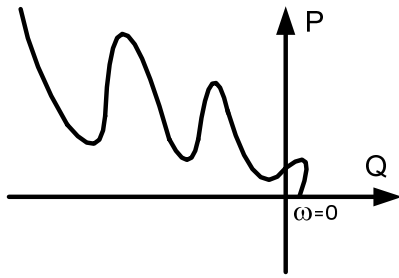


Рисунок 2.7 – Годограф Михайлова

сунке 2.7. Как видно из рисунка годограф САР начинается на положительной полуоси, проходит последовательно два квадранта и во втором квадранте уходит в бесконечность, что соответствует условию устойчивости САР, характеристическое уравнение которой имеет степень равную двум.

**Критерий устойчивости Найквиста.** Частотный критерий Найквиста дает возможность определить устойчивость замкнутой системы автоматического регулирования по амплитудно - фазовой характеристике ее разомкнутой цепи.

Предварительно должна быть определена устойчивость исследуемой системы в разомкнутом состоянии. Для неустойчивой системы нужно выяснить, какое число корней ее характеристического полинома имеет положительные вещественные части.

Различают три случая применения критерия Найквиста.

1. *Разомкнутая система устойчива.* В этом случае для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно – фазовая характеристика разомкнутой системы при изменении  $\omega$  от 0 до  $+\infty$  не охватывала точку с координатами  $(-1, 0)$ .

На рисунке 2.8 изображены основные из возможных ситуаций. При

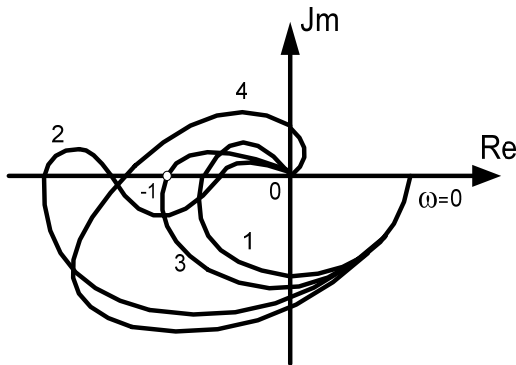


Рисунок 2.8 – АФХ устойчивых разомкнутых систем

АФХ, представленной кривой 1, замкнутая система абсолютно устойчива – она остается устойчивой и при уменьшении коэффициента передачи разомкнутой системы. Если АФХ представляет собой кривую 2 (рисунок 2.8), то замкнутая система будет устойчива в некотором диапазоне изменения коэффициента усиления разомкнутого контура. Кривая 3 проходит через критическую точку с координатами  $(-1, j0)$ . Это означает, что замкнутая система находится на колебательной границе устойчивости.

Кривая 4 охватывает критическую точку, поэтому замкнутая система неустойчива.

2. *Разомкнутая система на границе устойчивости.* Характеристический полином такой системы имеет нулевые или чисто мнимые корни, а у остальных корней отрицательные вещественные части.

Если нулевых корней  $\nu$ , АФХ при  $\omega = 0$  дугой бесконечно большого радиуса перемещается от положительной полуоси на  $\nu$  квадрантов по часо-

вой стрелке (рисунок 2.9а, для  $\nu = 1$ , рисунок 2.9б, для  $\nu = 2$ ).

Если пара чисто мнимых корней (в знаменателе частотной передаточной функции имеется множитель  $1 - \omega^2 T_i^2$ ), то АФХ при частоте  $\omega_i = 1/T_i$  дугой бесконечно большого радиуса перемещается на угол  $180^\circ$  по часовой стрелке (рисунок 2.9в).

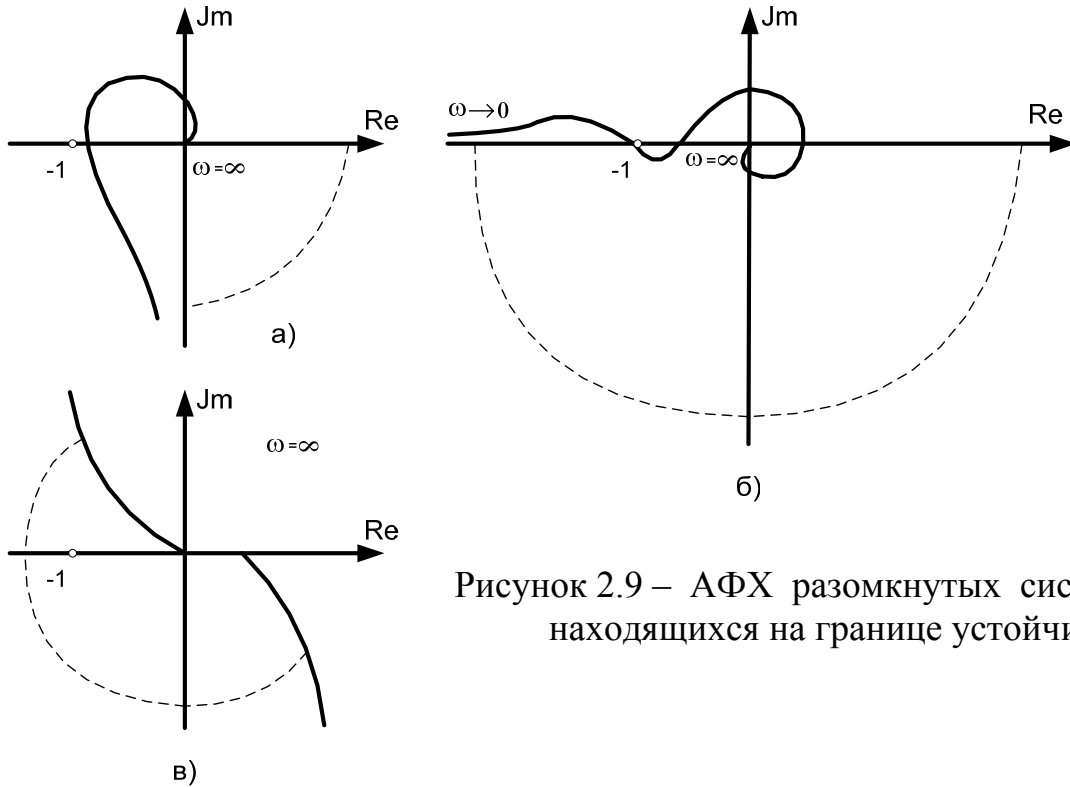


Рисунок 2.9 – АФХ разомкнутых систем находящихся на границе устойчивости

Приведенные примеры на рисунке 2.9а, 2.9б, 2.9в соответствуют случаю устойчивой системы, границе устойчивости и неустойчивой системы.

3. *Разомкнутая система неустойчива.* Характеристический полином такой системы имеет  $l$  корней с положительной вещественной частью.

В этом наиболее общем случае критерий формулируется так: для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  АФХ разомкнутой системы охватывала точку с координатами  $(-1, j0)$   $l/2$  раз в положительном направлении (против часовой стрелки).

Характеристический полином разомкнутой системы, кроме корней с вещественной частью (положительной или отрицательной), может иметь нулевые или чисто мнимые корни. В этом случае на участках разрыва АФХ должна быть дополнена дугой бесконечно большого радиуса.

При сложной форме АФХ разомкнутой системы удобнее пользоваться правилом перехода – переход АФХ при увеличении  $\omega$  через отрезок вещественной оси от  $-1$  до  $-\infty$  сверху вниз считают положительным и снизу вверх – отрицательным. АФХ может начинаться на указанном отрезке при  $\omega = 0$  или заканчиваться при  $\omega = \infty$ , в этом случае считается, что она совершает

полперехода (рисунок 2.10).

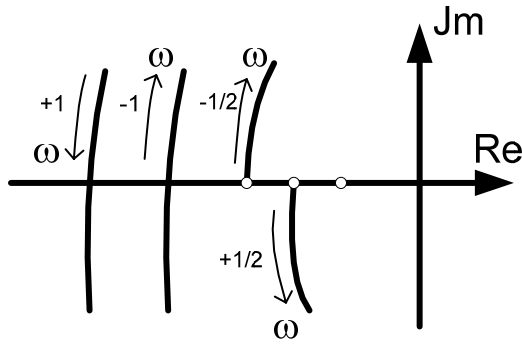


Рисунок 2.10 – Оценка переходов АФХ

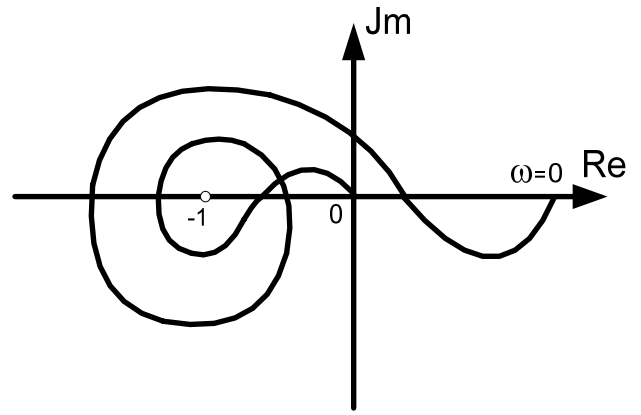


Рисунок 2.11 – АФХ неустойчивой САР

Пример АФХ соответствующей неустойчивой системе в разомкнутом состоянии ( $l = 2$ ) приведен на рисунке 2.11. Замкнутая система будет устойчива, поскольку количество переходов  $+2$ .

**Построение областей устойчивости.** Исследование устойчивости собственно говоря включает в себя два случая: определение устойчивости САР для заданных значений коэффициентов и исследование влияния на устойчивость САР некоторых ее параметров (например, настроечных коэффициентов регулятора). Допустимые значения одного или двух параметров определяются при неизменных значениях остальных. В последнем случае на плоскости двух коэффициентов строят область устойчивости, то есть область изменения рассматриваемых коэффициентов, при которых САР остается устойчивой.

Построение областей устойчивости возможно с помощью любого критерия устойчивости.

*Пример.* На плоскости коэффициентов определить  $\alpha$  и  $\beta$  найти области устойчивости для системы, описываемой уравнением:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + (\beta - \alpha) \frac{dy}{dt} + (1 + \alpha \cdot \beta - \beta)y = k_0 \cdot f(t) \quad (31)$$

Решение.

Необходимые и достаточные условия устойчивости системы, описываемой уравнением второго порядка – положительность всех коэффициентов характеристического уравнения. Передаточная функция системы имеет вид:

$$G(p) = \frac{k_0}{p^2 + (\beta - \alpha)p + 1 + \alpha \cdot \beta - \beta}.$$

Тогда характеристическое уравнение:

$$p^2 + (\beta - \alpha)p + 1 + \alpha \cdot \beta - \beta = 0.$$

Условия устойчивости:

$$a_1 = \beta - \alpha > 0, \quad a_2 = 1 + \alpha \cdot \beta - \beta > 0.$$

Коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  являются непрерывными функциями от  $\alpha$  и

$\beta$ , поэтому знаки  $a_1$  и  $a_2$  будут меняться там, где  $a_1 = a_2 = 0$ , то есть на прямой  $\beta - \alpha = 0$  и на гиперболе  $1 + \alpha \cdot \beta - \beta = 0$ . Эти линии разбивают плоскость параметров  $\alpha, \beta$  на четыре области I, II, III, IV (рисунок 2.12). В каждой из областей знаки  $a_1$  и  $a_2$  будут постоянны. Возьмем по одной произвольной точке в каждой области и определим в этих точках знаки коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$ .

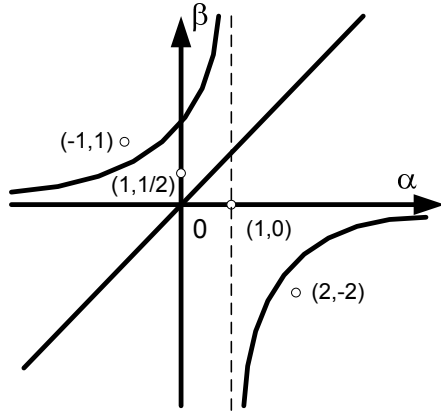


Рисунок 2.12 – Область устойчивости

Возьмем по одной произвольной точке в каждой области и определим в этих точках знаки коэффициентов  $a_1$  и  $a_2$ .

Область I: в точке  $(-1,1)$  имеем  $a_1 = 2 > 0, a_2 = -1 < 0$ . Решение уравнения (31) в этой области неустойчиво.

Область II: в точке  $(0,1/2)$  имеем  $a_1 = 1/2 > 0, a_2 = 1/2 > 0$ . Решение системы в области II устойчиво.

Область III: в точке  $(1,0)$  имеем  $a_1 = -1 < 0, a_2 = 1 > 0$ . Решение (31) неустойчиво.

Область IV: в точке  $(2,-2)$  имеем  $a_1 = -4 < 0, a_2 = -1 < 0$ . Решение (31) неустойчиво.

Исследуем на устойчивость решение (31) на границах рассмотренных областей.

При  $\beta = \frac{1}{1-\alpha}, \alpha < 1$  (граница между областями I и II). На этой границе  $a_1 > 0, a_2 = 0$ , так что решение на ней устойчиво, но не асимптотически.

На границе между областями II и III ( $\alpha = \beta$ )  $a_1 = 0, a_2 > 0$ , так что решение на ней устойчиво, но не асимптотически.

**Понятие D – разбиения.** Допустим, что в системе  $n$ -го порядка имеется  $m$  каких либо изменяемых параметров. Построим  $m$  мерное пространство параметров. На рисунке 2.13 показано для примера трехмерное пространство параметров  $p_1, p_2, p_3$ . Определенная точка, например  $N_1$ , в этом пространстве соответствует определенным значениям параметров  $p_1, p_2, p_3$ , а следовательно, определенным значениям коэффициентов характеристического уравнения. При этом  $n$  корней уравнения также имеют некоторые фиксированные значения.

Предположим, что  $k$  из этих корней лежит в левой полуплоскости, а остальные  $(n - k)$  корней – в правой полуплоскости. Совокупность точек  $N$ , характеризуемых тем, что  $k$  корней находится в левой полуплоскости, а  $(n - k)$  – в правой, образует в пространстве параметров область, которую

обозначим  $D(k, n - k)$ . Если  $n = k$ , то это область устойчивости.

Все пространство параметров может быть разделено на  $n + 1$  областей типа  $D(k, n - k)$ , где  $k = 1, 2, \dots, n$ . Подобное разбиение пространства параметров Неймарк назвал  $D$  – разбиением. Одна из областей, на которые разбивается пространство параметров, а именно  $D(n, 0)$  является областью устойчивости.

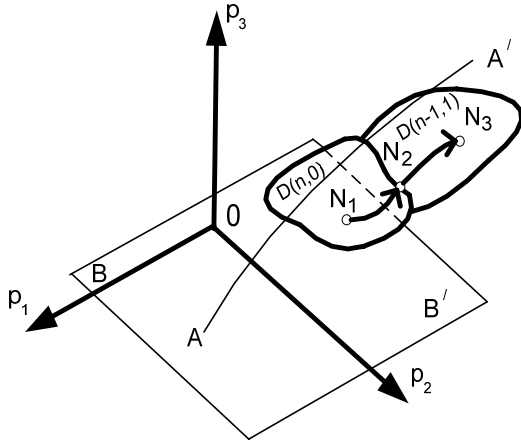


Рисунок 2.13 – Пространство параметров

Если изменять значения параметров  $p_1, p_2, p_3$  то изображающая точка  $N$  движется по некоторой траектории. При этом корни характеристического уравнения движутся по комплексной плоскости. Если точка попадает на границу  $D$  – области ( $N_2$  на рисунке 2.13), то при этом по крайней мере один корень оказывается на мнимой оси. При переходе, например, из области  $D(n, 0)$  в область  $D(n - 1, 1)$  один ко-

рень переходит из левой полуплоскости в правую.

Любая точка, находящаяся на границе, отделяющей друг от друга две области  $D$  – разбиения, соответствует такому расположению корней, когда имеется корень на мнимой оси  $p = j\omega$  ( $\omega$  – действительное число). Подставив в характеристическое уравнение  $p = j\omega$  и приравняв нулю отдельно действительную и мнимую составляющие характеристического многочлена, можно получить два уравнения. Исключив из этих уравнений  $\omega$ . Получим уравнение гиперповерхности в пространстве параметров, являющейся границей  $D$  – разбиения. Таким образом, получение  $D$  – разбиения сравнительно просто.

Рассмотрим пример  $D$  – разбиения на плоскости двух параметров. Пусть в уравнение системы входят два параметра  $\alpha$  и  $\beta$ . Требуется построить  $D$  – разбиение в плоскости этих параметров. Допустим параметры  $\alpha$  и  $\beta$  входят линейно в характеристическое уравнение, тогда последнее может быть представлено в виде:

$$\alpha \cdot Q(p) + \beta \cdot P(p) + R(p) = 0. \quad (32)$$

Положим  $p = j\omega$ . Пусть

$$Q(\omega) = Q_1(\omega) + jQ_2(\omega)$$

$$P(\omega) = P_1(\omega) + jP_2(\omega)$$

$$R(\omega) = R_1(\omega) + jR_2(\omega) \quad (33)$$

Поставив (33) в (32) и приравняв нулю отдельно действительную и мнимую составляющие левой части уравнения. Получим два равенства

$$\begin{aligned} \alpha \cdot Q_1(\omega) + \beta \cdot P_1(\omega) + R_1(\omega) &= 0 \\ \alpha \cdot Q_2(\omega) + \beta \cdot P_2(\omega) + R_2(\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (34)$$

Из этих двух уравнений можно найти  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} -R_1(\omega) & P_1(\omega) \\ -R_2(\omega) & P_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q_1(\omega) & P_1(\omega) \\ Q_2(\omega) & P_2(\omega) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \beta = \frac{\begin{vmatrix} Q_1(\omega) & -R_1(\omega) \\ Q_2(\omega) & -R_2(\omega) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} Q_1(\omega) & P_1(\omega) \\ Q_2(\omega) & P_2(\omega) \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \quad (35)$$

Формулы (35) дают уравнение кривой границы  $D$  – разбиения на плоскости  $(\alpha, \beta)$  в параметрическом виде. Изменяя  $\omega$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ , можно получить  $D$  – разбиение (рисунок 2.14).

Если определитель  $\Delta = 0$  при некотором значении  $\omega$ , то уравнения (34) уже не являются линейно независимыми и вырождаются в одно лишь уравнение.

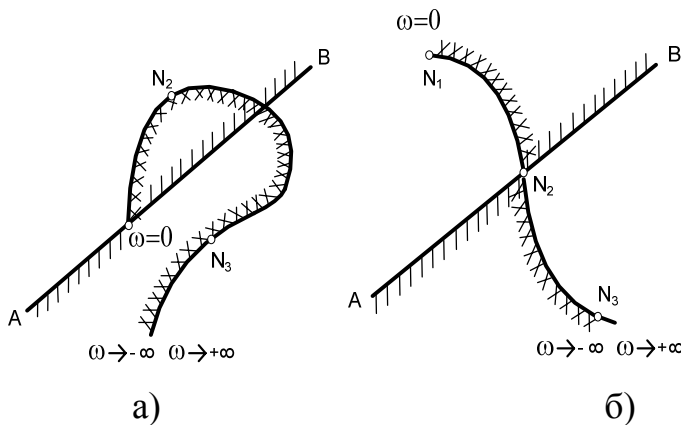


Рисунок 2.14 – Области  $D$  – разбиения

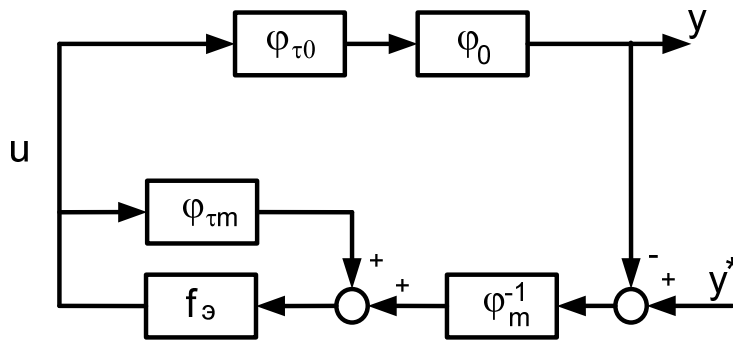
При подобном исключительном значении  $\omega$  (обычно это имеет место при  $\omega = 0$  или  $\omega = \infty$ ) получаем не точку на плоскости  $(\alpha, \beta)$ , а прямую. На рисунке 2.14 показаны линии  $N_1N_2N_3$  границы  $D$  – разбиения и прямая  $AN_1B$ , соответствующая исключительному значению  $\omega$ . На рисунке 2.14а  $\omega = 0$ , на рисунке 2.14б исключительное значение  $\omega$  не равно нулю. Линии  $N_1N_2N_3$  и  $AN_1B$  делят плоскость на  $D$ - области. При распознавании области устойчивости полезно пользоваться штриховкой. Правило штриховки в данном случае формулируется следующим образом: штриховку ведут слева от кривой идя от  $\omega = -\infty$  в случае, когда  $\Delta > 0$ . Если же  $\Delta < 0$ , то штриховку производят справа от кривой. Обычно при  $\omega > 0$  и  $\omega < 0$  проходится одна и та же кривая, но в противоположных направлениях. Если в точке  $\omega = 0$  определитель меняет знак (рисунок 2.14а), то идя от  $N_3$  к  $N_1$  штрихуют слева, а затем, идя обратно по кривой, штрихуют уже справа. Следовательно получается двойная штриховка по одну сторону кривой, что означает прибавление двух корней в правой комплексной полуплоскости при переходе с заштрихованной стороны на незаштрихованную.

Прямые, соответствующие исключительным значениям  $\omega$ , также

штрихуются. Эта штриховка должна быть согласована со штриховкой кривой так, чтобы внутренние стороны угла в точке стыка оказались полностью заштрихованными. Сторона с которой заштрихована прямая, меняется при переходе точки  $N_1$  (рисунок 2.14а) и  $N_2$  (рисунок 2.14б).

При построении областей D – разбиения достаточно сложных систем вопросы штриховки становятся весьма затруднительными. В этом смысле представляет интерес построение областей D – разбиения на плоскости относительных параметров для систем регулирования с моделью процесса. Поясним сказанное на примере.

*Пример.* Определить область устойчивости на плоскости относительных параметров САР с модифицированным регулятором Ресвика. Структура системы приведена на рисунке 2.15. Передаточные функции элементов системы заданы в виде:



структуры системы приведена на рисунке 2.15. Передаточные функции элементов системы заданы в виде:

$$\varphi_o(p) = \frac{k_o}{T_o p + 1}, \quad (36)$$

$$\varphi_{\tau o}(p) = e^{-p\tau_o}, \quad (37)$$

$$\varphi_{\tau m}(p) = e^{-p\tau_{mo}}, \quad (38)$$

$$\varphi_m(p) = \frac{k_m}{T_m p + 1}, \quad f_{\Delta}(p) = \frac{1}{T_{\Delta} p + 1}. \quad (39)$$

Рисунок 2.15 – Структура САР

Решение. Характеристическое уравнение системы:

$$1 - \varphi_{\tau m}(p) \cdot f_{\Delta}(p) + \varphi_o(p) \cdot \varphi_{\tau o}(p) \cdot \varphi_m^{-1}(p) \cdot f_{\Delta}(p) = 0. \quad (40)$$

Подставим конкретные выражения для передаточных функций (36)-(39) в (40). После преобразований получим

$$k_m T_o T_{\Delta} p^2 + k_m (T_{\Delta} + T_o) p + k_m - T_o k_m p e^{-p\tau_m} - k_m e^{-p\tau_m} + T_m k_o p e^{-p\tau_o} + k_o e^{-p\tau_o} = 0 \quad (41)$$

Положим в (41)  $p = j\omega$ , разделим действительные и мнимые переменные и приравняем их к нулю. Получим

$$\begin{aligned} k_m - k_m T_o T_{\Delta} \omega^2 - T_o k_m \omega \sin \omega \tau_m - k_m \cos \omega \tau_m + \\ + T_m k_o \omega \sin \omega \tau_o + k_o \cos \omega \tau_o = 0, \\ k_m \omega (T_o + T_{\Delta}) - \omega T_o k_m \cos \omega \tau_m + k_m \sin \omega \tau_m + \\ + T_m k_o \omega \cos \omega \tau_o - k_o \sin \omega \tau_o = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Заменим в (42)  $\omega \tau_m = t$ . После подстановки получим следующую систему уравнений



$$\begin{aligned} \psi[-\xi g t^2 - t \sin t] + \varepsilon[gt \sin \lambda t + \cos \lambda t] &= \cos t - 1, \\ \psi[g - gt \cos t] + \varepsilon[gt \cos \lambda t - \sin \lambda t] &= -t\xi - \sin t \end{aligned} \quad (43)$$

где  $\varepsilon = k_o / k_m$  - отношение коэффициентов передачи канала регулирования и его модели;  $\psi = T_o / T_m$  отношение постоянных времени канала регулирования и его модели;  $\lambda = \tau_o / \tau_m$  - отношение запаздывания в канале регулирования и его модели;  $\xi = T_s / \tau_m$  отношение постоянной экстраполятора к запаздыванию принятому в модели канала регулирования;  $g = T_m / \tau_m$  - отношение постоянных времени и запаздывания в модели канала регулирования. Определим области D - разбиения на плоскости коэффициентов  $(\varepsilon - \psi)$ :

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -\xi g t^2 - t \sin t & gt \sin \lambda t + \cos \lambda t \\ g - gt \cos t & gt \cos \lambda t - \sin \lambda t \end{vmatrix}, \\ \Delta_\varepsilon &= \begin{vmatrix} \cos t - 1 & gt \sin \lambda t + \cos \lambda t \\ -t\xi - \sin t & gt \cos \lambda t - \sin \lambda t \end{vmatrix}, \\ \Delta_\psi &= \begin{vmatrix} -\xi g t^2 - t \sin t & \cos t - 1 \\ g - gt \cos t & -t\xi - \sin t \end{vmatrix}, \\ \varepsilon &= \frac{\Delta_\varepsilon}{\Delta}, \quad \psi = \frac{\Delta_\psi}{\Delta}. \end{aligned}$$

На рисунке 2.16 приведены области D - разбиения при ограничении относительных коэффициентов  $\varepsilon, \psi$  в диапазоне (0;5) при  $\lambda = 1$ ,  $g = 0,2$ ,  $\xi = 0,67$ .

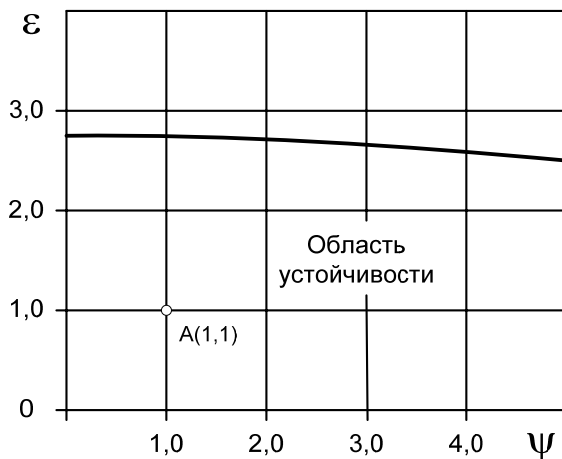


Рисунок 2.16 – Область устойчивости

Область устойчивости определяется в данном случае как область которой принадлежит точка с координатами (1,1). Действительно при

$$\varphi_0(p) = \varphi_m(p)$$

$$\varphi_{\tau_0}(p) = \varphi_{\tau_m}(p)$$

характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$T_s p + 1 = 0, T_s > 0,$$

т.е. система устойчива при

$$\varepsilon = k_o / k_m = 1,0$$

$$\psi = T_o / T_m = 1,0.$$

При наличии нескольких границ D - разбиения в качестве области ус-

тойчивости выбирается минимальная из областей, включающая точку  $A(1,1)$ .

**Устойчивость систем с запаздыванием.** В этом случае в структуре системы автоматического регулирования имеются звенья чистого (транспортного) запаздывания (рисунок 2.1).

Исследование устойчивости такой системы может быть выполнено с использованием критерия Найквиста. Передаточная функция разомкнутой САР должна быть представлена в виде:

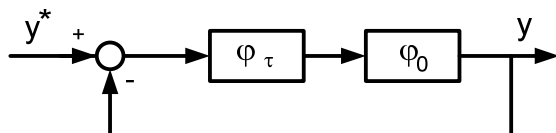


Рисунок 2.17 – САР с запаздыванием

$$G(p) = \varphi_o(p) \cdot \varphi_\tau(p) = \\ = \varphi_o(p) \cdot e^{-p\tau}.$$

где  $\varphi_o(p)$  - передаточная функция системы без запаздывания. Точка размыкания САР должна быть выбрана в соответствии с расположением звена чистого запаздывания, для получения передаточной функции разомкнутой системы в указанном виде.

Формулировка критерия Найквиста для систем с чистым запаздыванием сохраняется прежней. Однако построение АФХ имеет некоторую особенность. Подставив в выражение передаточной функции  $p = j\omega$ , получим частотную передаточную функцию:

$$G(j\omega) = \varphi_o(j\omega) \cdot e^{-j\omega\tau} = A(\omega) \cdot e^{j\psi},$$

где  $A(\omega) = A_0(\omega) = |G(j\omega)|$  и  $\psi(\omega) = \psi_0 - \tau\omega$ .

Иначе говоря, звено чистого запаздывания не изменяет АФХ, но создает дополнительный, отрицательный сдвиг по фазе, пропорциональный частоте. Поэтому можно построить АФХ системы без запаздывания и для каждой частоты  $\omega_i$  повернуть вектор  $A_0(\omega_i)$  на угол  $-\tau \cdot \omega_i$ , т.е. по часовой стрелке. Получается АФХ разомкнутой системы с запаздыванием.

*Пример.* Построить АФХ разомкнутой САР, если ее передаточная функция

$$G(p) = \varphi_o(p) \cdot e^{-p\tau} = \frac{1,6}{3p+1} e^{-3p}.$$

Построим АФХ системы без запаздывания. Заменим  $p = j\omega$ , после преобразований получим:

$$A(\omega) = \frac{\sqrt{2,56 + 23,04 \cdot \omega^2}}{9 \cdot \omega^2 + 1}; \quad \psi_0 = -\text{arctg } 3 \cdot \omega.$$

Годограф системы без запаздывания приведен на рисунке 2.18 (кривая 1). Запаздывание определяет дополнительный фазовый сдвиг  $-\omega \cdot \tau$  «закручивает» годограф системы без запаздывания по часовой стрелке (кривая 2 на рисунке 2.18).

Для оценки влияния чистого запаздывания на устойчивость введено понятие критического запаздывания.

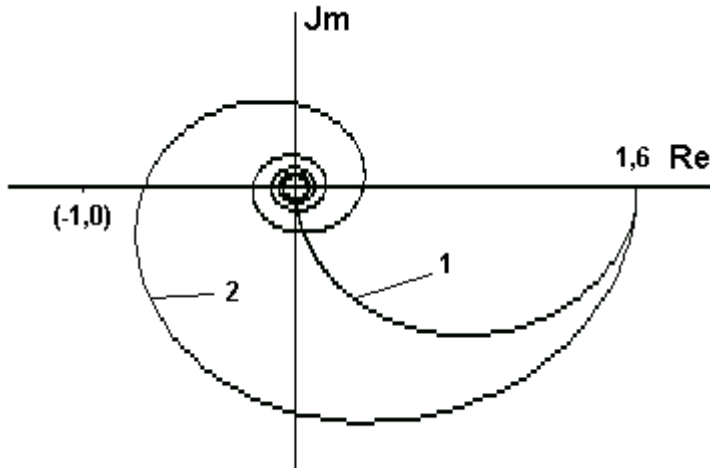


Рисунок 2.18 – Годографы разомкнутой системы  
1- без запаздывания;  
2- с запаздыванием.

Для определения критического запаздывания, на годографе САР без запаздывания, необходимо найти точку для которой модуль равен единице:

$$A(\omega_1) = 1.$$

Пусть этой точке соответствует частота  $\omega_1$  и запас по фазе  $\psi_1$  (угол на который необходимо повернуть вектор  $A(\omega_1) = 1$  по часовой стрелке до совмещения с действительной осью).

Тогда критическое время запаздывания определяется как:

$$\tau_{кр} = \psi_1 / \omega_1.$$

## 2.6. Оценка качества регулирования

Система автоматического регулирования оценивается устойчивостью и точностью в установившихся режимах и качеством переходных процессов. Устойчивость обеспечивает затухание переходных процессов. Методы исследования устойчивости рассмотрены в параграфах 2.1 – 2.5. Кроме устойчивости необходимо чтобы в установившихся режимах выходная (регулируемая) величина была равна заданной. Необходимо также, чтобы переходные процессы затухали достаточно быстро с допустимыми отклонениями регулируемой величины.

Качество регулирования оценивается с помощью показателей качества, которые представляют собой некоторые функционалы, где роль независимых переменных играют функции, характеризующие переходные процессы в САР.

Различают прямые и косвенные оценки качества регулирования.

**Прямые оценки качества регулирования.** Прямые оценки базируются непосредственно на знании переходного процесса. Основные типы переходных процессов в устойчивых системах представлены на рисунке 2.19. На рисунке 2.19 представлены два случая переходных процессов – по задающему воздействию (рисунок 2.19а) и по возмущающему воздействию (рисунок 2.19б).

Переходные процессы бывают колебательные (кривая 1) и апериодические (кривая 2).

В современной САР используются такие показатели как:

1. Интегральная абсолютная ошибка регулирования

$$J = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)| \cdot dt, \quad \varepsilon(t) = y(t) - y^*(t).$$

2. Интегральная квадратичная ошибка регулирования

$$J = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) \cdot dt.$$

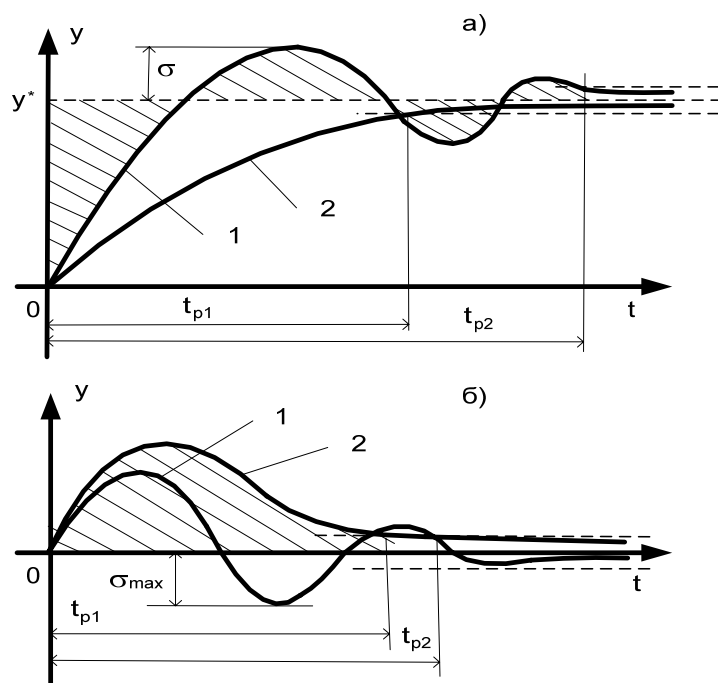


Рисунок 2.19 – Основные типы переходных процессов

(время регулирования). Определяется как разница времени окончания переходного процесса и временем начала изменения внешнего воздействия

$$t_p = t_0 - t_k.$$

В идеальной линейной системе переходный процесс бесконечен, поэтому время окончания переходного процесса определяют с того момента времени, когда ошибка регулирования перестанет превышать некоторую заданную величину  $\Delta$ . Значение  $\Delta$  обычно принимают равной 5% от установившегося (заданного) уровня выходного сигнала.

5. Статическая ошибка регулирования

$$\varepsilon_{ст} = |y_{уст} - y^*|,$$

где  $y_{уст}$  -установившееся значение выходной переменной.

Можно указать три основных способа задания требований, предъявляемых к характеру переходных процессов.

Первый способ заключается в задании некоторых допустимых преде-

3. Перерегулирование

$$\delta = \frac{\sigma}{y^*} \cdot 100\%.$$

При оценивании качества регулирования при компенсации возмущающего воздействия (рисунок 2.19б) величина перерегулирования определяется как отношение абсолютной величины максимального отклонения отрицательного знака к максимальному отклонению регулируемой переменной положительного знака.

4. Длительность переходного процесса

переходного процесса

лов для показателей переходного процесса, либо в задании качественных характеристик кривой переходного процесса. Например, можно потребовать, чтобы время переходного процесса было меньше некоторой предельно допустимой величины. Можно потребовать, чтобы перерегулирование отсутствовало или было меньше некоторой заданной величины. Можно потребовать, чтобы процесс был монотонным. Все подобные требования относятся к самой кривой без привлечения каких либо других кривых для сравнения.

Второй способ формулирования требований к переходному процессу заключается в том, что требуется обеспечить соответствие не отдельным показателям переходного процесса, а близость кривой переходного процесса  $y(t)$  к некоторой заданной кривой  $y^*(t)$ .

При третьем способе требуется, чтобы какой-либо показатель или критерий переходного процесса принимал экстремальное значение (например, длительность переходного процесса должна быть минимальной) при условии выполнения ограничений на остальные координаты САР. При формулировке требований должны быть определены начальные условия, класс задающих либо возмущающих воздействий, приложенных к системе. Использование третьего способа задания требований к переходному процессу характерно для построения оптимальных систем регулирования.

Использование перечисленных показателей качества возможно только при условии действия детерминированных внешних воздействий. Для реальных, натуральных систем автоматического регулирования характерно наличие случайных, непредсказуемых воздействий. В этом случае удобнее использовать показатели, которые более «технологичны», например среднеквадратическое или среднемодульное отклонение, вероятность выхода регулируемой переменной за заданный диапазон и т.д. Оценка качества регулирования определяется на скользящем интервале времени – минута, час и т.д..

**Косвенные оценки качества переходных процессов.** Единственный точный теоретический метод изучения всех деталей кривой переходного процесса состоит в вычислении этой кривой и изображении ее в виде графика  $y(t)$ . Возможны различные способы построения переходного процесса:

- графический;
- аналитический;
- моделирование на ЭВМ.

Второй метод построения переходного процесса для линейной системы связан с определением корней характеристического уравнения, что достаточно трудоемко для САР описываемых уравнениями высокого порядка. Кроме того, чтобы выяснить влияние параметров системы на показатели переходного процесса, необходимо построить ряд кривых для различных комбинаций этих параметров.

Первый и второй способы не связаны с вычислением корней характеристического уравнения, однако каждый из них имеет свои недостатки. Графический метод неприменим для достаточно сложных систем, так как точность построения выходной переменной элементарного блока зависит от

точности построения выходной переменной предыдущего блока, что приводит к накоплению ошибок. При моделировании САР на ЭВМ существует проблема представления дифференциального уравнения САР в виде разностного уравнения и точности такой замены.

В общем случае невозможно получить аналитическое соотношение между временем регулирования или перерегулированием и параметрами системы. Поэтому нет возможности выяснить влияние параметров без весьма громоздких числовых подсчетов.

Часто не требуется знания всех деталей кривой  $y(t)$ , достаточно знать некоторые ее характеристики. Существуют выражения, позволяющие «перепрыгнуть мост» между параметрами системы и показателями переходного процесса. Эти выражения носят название *косвенных критериев*. Они связаны, с одной стороны, с параметрами системы, а с другой стороны – с показателями переходного процесса.

Можно выделить следующие основные группы косвенных критериев:

- частотные критерии;
- критерии распределения корней;
- интегральные критерии.

Частотные характеристики позволяют судить не только об устойчивости, но и о характере переходных процессов. Особенно важна амплитудно-частотная характеристика. Для системы автоматического регулирования, в которой требуется обеспечить поддержание равенства между входной (заданное значение) и выходной переменной идеальное значение  $A(\omega)$  равно единице для любых частот входного воздействия (пунктирная линия на рисунке 2.20).

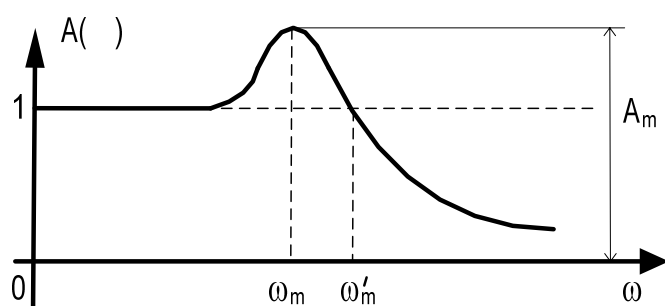


Рисунок 2.20 – Амплитудно- частотная характеристика

В реальной системе  $A(\omega)$  близка к единице при малых частотах  $\omega$  и заметно отличается при более высоких частотах (сплошная кривая на рисунке 2.20). В некоторых системах при приближении к частоте  $\omega_m$  величина  $A(\omega)$  возрастает до значений больше единицы, а затем быстро спадает до значений  $A(\omega) \ll 1$ .

Максимум  $A_m$  амплитудно-частотной характеристики и ширина полосы пропускания частот  $\omega'_m$ , являются важными косвенными критериями, по которым можно судить о характере переходного процесса. Так, например, при высоте резонансного пика  $A_m$ , выше 1.2 – 1.3, в переходном процессе выявляются заметные и слабо затухающие колебания частоты близкой к  $\omega_m$ ; ши-

рина полосы пропускания частот  $\omega_m'$  влияет на скорость протекания переходных процессов – чем шире полоса пропускания частот, тем быстрее протекают переходные процессы в системе, при прочих равных условиях.

Методы распределения корней дают возможность, при известных нулях изображения  $Y(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ , а также некоторых сведениях о расположении полюсов этого изображения на комплексной плоскости, узнать некоторые черты переходного процесса.

Оказывается, если полюсы  $Y(p)$  распределены в определенных областях на комплексной плоскости, то не зная самих значений полюсов, можно гарантировать соблюдение определенных условий для переходного процесса. При этом необходимо также определение или оценка нулей многочлена  $N(p)$ .

Чтобы получить более детальные сведения о переходном процессе, необходимо уточнить местоположение нулей  $D(p)$ . Можно, не решая характеристического уравнения, для данной системы, определить в левой полуплоскости некоторую область, внутри которой расположены корни уравнения  $D(p) = 0$ . Например, можно найти абсолютную величину  $\eta$  действительной составляющей корня, ближе всех расположенного к мнимой оси и определить величину угла  $2\varphi$ , соответствующего сектору на рисунке 2.21.

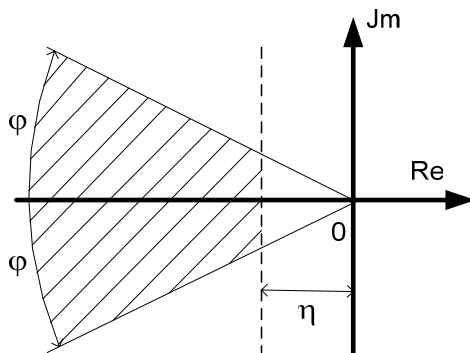


Рисунок 2.21 – Расположение корней на комплексной плоскости

ке 2.21).

Различают несколько интегральных косвенных критериев,  $I_1$  - для монотонных переходных процессов:

$$I_1 = \frac{a_0[y^{(n-1)}]_0 + a_1[y^{(n-2)}]_0 + \dots + a_{n-1}[y]_0}{a_n},$$

$I_2$  - по площади кривой  $y^2$ :

Величина  $\eta$  называется *затуханием* системы. Чем больше  $\eta$ , тем, вообще говоря, быстрее затухает переходный процесс. Величина  $\mu = \operatorname{tg} \varphi$  носит название *колебательности*.

Затухание и колебательность являются косвенными критериями переходного процесса. Совокупность  $\eta$  и  $\varphi$  определяют область в которой расположены все корни характеристического уравнения (заштрихованная область на рисунке 2.21).

$$I_2 = \int_0^{\infty} y^2 dt ,$$

или  $I_V$  - обобщенный интегральный критерий:

$$I_V = \int_0^{\infty} V dt ,$$

где  $V$  - некоторая квадратичная форма от переменных, характеризующих состояние системы, например от величины выходной переменной и ее производных.

Недостатком указанных интегральных критериев является то, что в общем случае нельзя высказать мнение о характере переходного процесса. Мало того, нельзя утверждать, что переходный процесс, для которого интеграл меньше – лучше.

**Построение переходных процессов в САР.** Как отмечалось выше, различают методы построения переходных процессов, основанные на графических построениях, аналитическом решении уравнения системы автоматического регулирования и методы, базирующиеся на получении решения в процессе моделирования САР на цифровых вычислительных машинах.

Рассмотрим построение переходного процесса на примере САР, структура которой представлена на рисунке 2.22. На вход системы приложено единичное ступенчатое воздействие  $y^*(t)$ . Начальные условия нулевые.

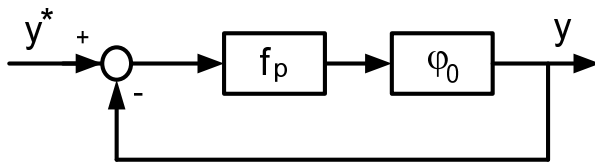


Рисунок 2.22 – Структура САР

Пусть объект управления описывается дифференциальным уравнением первого порядка, в качестве регулятора используется регулятор с пропорционально - интегральным законом регули-

рования. Значения параметров объекта и настроечных коэффициентов регулятора приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Значения настроечных коэффициентов

| Обозначение | Значение |
|-------------|----------|
| $T_0$       | 1,0      |
| $k_0$       | 1,0      |
| $k_1$       | 1,0      |
| $k_2$       | 2,0      |



Тогда уравнение системы запишется следующим образом:

$$T_0 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + (1 + k_1 k_0) \frac{dy(t)}{dt} + k_0 k_2 y(t) = k_1 k_0 \frac{dy^*(t)}{dt} + k_0 k_2 y^*(t).$$

Найдем изображение Лапласа при нулевых начальных условиях:

$$[T_0 s^2 + (1 + k_1 k_0)s + k_0 k_2] \cdot Y(s) = [k_1 k_0 s + k_0 k_2] \cdot Y^*(s), \quad (44)$$

где  $s$  - комплексная переменная Лапласа;  $Y(s), Y^*(s)$  - изображения, соответственно, входной и выходной величины.

Выходная переменная определяется как:

$$Y(s) = \frac{k_1 k_0 s + k_0 k_2}{T_0 s^2 + (1 + k_1 k_0)s + k_0 k_2} \cdot Y^*(s). \quad (45)$$

Изображение входной переменной:

$$Y^*(s) = L\{1(t)\} = \frac{1}{s}. \quad (46)$$

Подставим (46) в (45) получим

$$Y(s) = \frac{k_1 k_0 s + k_0 k_2}{[T_0 s^2 + (1 + k_1 k_0)s + k_0 k_2] \cdot s} = \frac{s + 2}{s \cdot (s^2 + 2s + 2)}$$

Для нахождения  $y(t)$  воспользуемся формулой для случая нулевого корня:

$$y(t) = \frac{A(0)}{B_1(0)} + \sum_{i=2}^n \frac{A(s_i)}{s_i \cdot B_1'(s_i)} e^{s_i t}, \quad (47)$$

где  $B_1(s) = s^2 + 2s + 2$ ;  $B_1'(s) = 2s + 2$ ;  $A(0) = 2$ ;  $B_1(0) = 2$ ,

$$s_{1,2} = -1 \pm j \quad (48)$$

Подставим (48) в (47)

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{2}{2} + \frac{(-1+j)+2}{(-1+j)(-2+2j+2)} e^{(-1+j)t} + \frac{(-1-j)+2}{(-1-j)(-2-2j+2)} e^{(-1-j)t} = \\ &= 1 + e^{-t} \left[ \frac{(-1+j)+2}{(-1+j)(-2+2j+2)} e^{jt} + \frac{(-1-j)+2}{(-1-j)(-2-2j+2)} e^{-jt} \right] = \\ &= 1 + e^{-t} \left[ \frac{1+j}{(-1+j)2j} e^{jt} - \frac{1-j}{(-1-j)2j} e^{-jt} \right] = 1 - e^{-t} \cos t. \end{aligned}$$

График переходного процесса  $y(t) = 1 - e^{-t} \cos t$  приведен на рисунке 2.23.

В случае построения переходного процесса путем моделирования САР на цифровой вычислительной машине необходимо представить  $Y(s)$  в дискретной форме. Возможны два подхода при построении дискретной САР для моделирования на ЭВМ непрерывной САР, представленной, например, на рисунке 2.24:

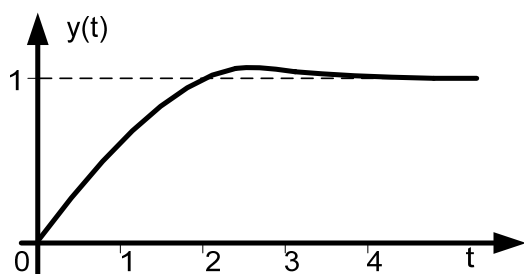


Рисунок 2.23 – Переходный процесс

- замена оператора  $s$  преобразования Лапласа функциями оператора дискретного преобразования  $z$ ;
- использование таблиц соответствия (табличный метод)  $f(s) \Leftrightarrow f(z)$ .

В первом случае реализуется замена:

$$s \approx \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, s^2 \approx \left( \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right)^2, \dots$$

или с использованием более точных формул, например

$$s \approx \frac{2}{\Delta t} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, s^2 \approx \frac{3}{\Delta t} \cdot \frac{1 - z^{-2}}{1 + 4z^{-1} + z^{-2}}, \dots$$

Этот метод позволяет лишь приближенно отображать динамические характеристики непрерывных объектов.

Табличный метод включает в себя:

- разложение передаточной функции  $W(s)$  на элементарные  $\sum_i W_i(s)$ ;
- представление элементарных передаточных функций в виде

$$W_i(s) = \frac{c_i}{s - a_i},$$

где  $a_i$  - корни знаменателя передаточной функции  $W(s)$ ;

$$c_i = [W(s)(s - a_i)]_{p=a_i}.$$

При наличии комплексных корней  $a_i = d_i \pm \gamma_i$  в разложение вводят слагаемые вида

$$\frac{D_i(s + d_i)}{(s + d_i)^2 + \gamma^2} \text{ и } \frac{E_i \gamma_i}{(s + d_i)^2 + \gamma^2}.$$

Коэффициенты  $D_i, E_i$  находят приравнованием сомножителей при соответствующих степенях  $s$  в исходном полиноме числителя  $W(s)$  и полиноме числителя табличного разложения после приведения последнего к общему знаменателю;

- по таблицам преобразования Лапласа и Z- преобразования выполняется замена элементарных передаточных функций  $W_i(s)$  на  $W_i(z)$ , например,

$$\frac{1}{s + a_i} \Leftrightarrow \Delta t \frac{z}{z - \alpha_i}, \alpha_i = e^{-a_i \Delta t}.$$

- приведение выражения  $\sum_i W_i(z)$  к общему знаменателю; получение дис-

кретной передаточной функции  $W(z) = B(z) / A(z)$ ;

- составление уравнения дискретного объекта  $Y(z) = W(z) \cdot X(z); A(z) \cdot Y(z) = B(z) \cdot X(z)$ ,

где  $Y(z), X(z)$  - соответственно выходная и входная переменные;  
 - получение рекуррентного моделирующего выражения цифровой системы

$$y(k) = \sum_{j=0}^m x(k-j) + \sum_{j=1}^n y(k-j),$$

где  $m, n$  - соответственно порядок числителя и знаменателя  $W(z)$ .

Оба подхода не позволяют получить значения промежуточных переменных в процессе моделирования.

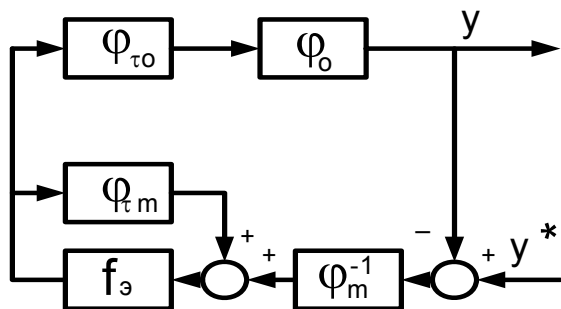


Рисунок 2.24 – Структура САР с моделью процесса

Более удобно аппроксимировать не передаточную функцию САР, а отдельные звенья, например, для системы регулирования представленной на рисунке 2.24 – звенья с передаточными функциями:

$$\varphi_{\tau_0}(s), \varphi_0(s), f_{\varepsilon}(s), \varphi_m(s), \varphi_m^{-1}(s),$$

а затем составляется алгоритм моделирования в соответствии с структурой рассматриваемой САР (рисунок 2.25).

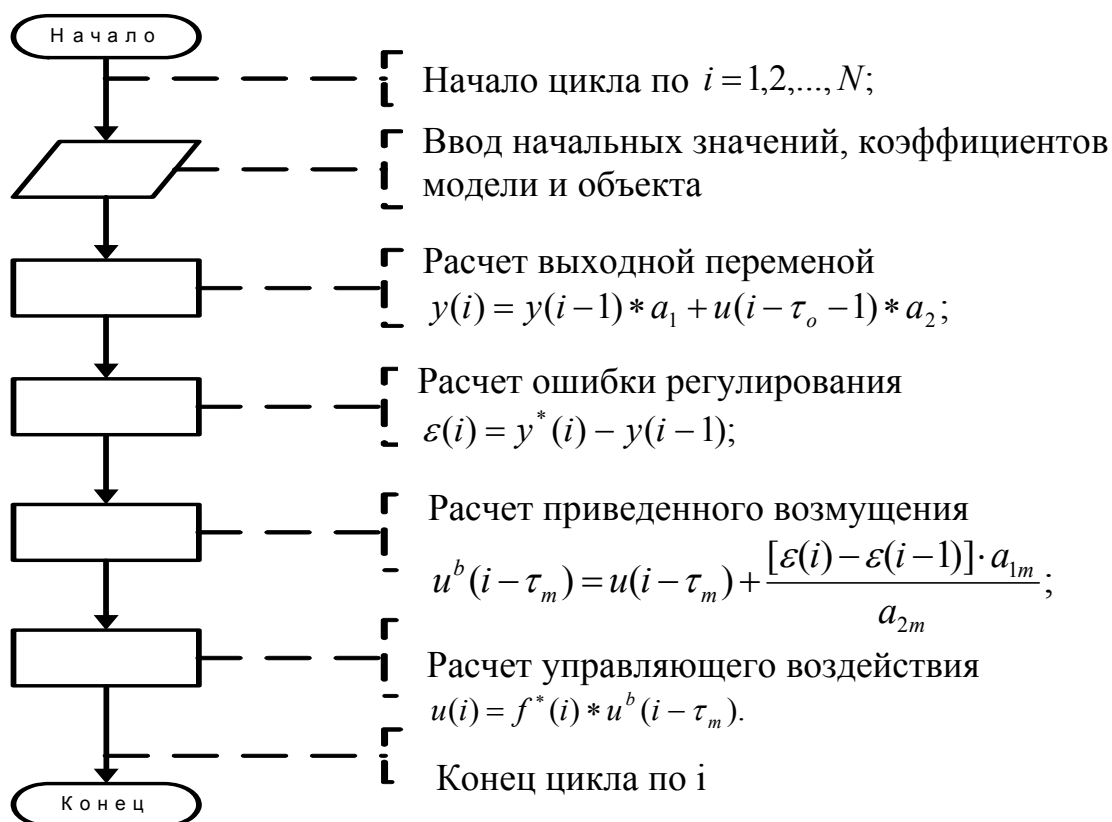


Рисунок 2.25 - Алгоритм моделирования непрерывной САР на ЭВМ

### 3. Пространство состояний в теории управления

#### Понятие состояния

Рассмотрим электрическую цепь известной структуры, содержащую один вход и один выход (рисунок 3.1)

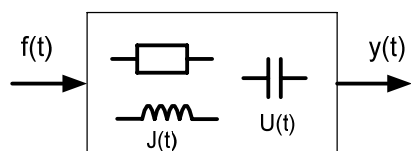


Рисунок 3.1 – Электрическая цепь

Входным сигналом цепи служит функция времени  $f(t)$ , а выходом – функция времени  $y(t)$ . Имея полную информацию о цепи, для определения выхода  $y(t)$  на интервале времени  $(-\infty, t)$  достаточно знать входной сигнал  $f(t)$  на всем дан-

ном временном интервале. Однако, если вход известен лишь на интервале  $(t_0, t)$  для определения выхода  $y(t)$  на указанном интервале необходимо знать токи, протекающие через индуктивности, и напряжения на емкостях в некоторый момент времени  $t_0$ . Эти токи и напряжения образуют «состояние» цепи в момент времени  $t_0$ . В этом смысле состояние цепи связывают с ее памятью.

В качестве другого примера состояния системы рассмотрим решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами на аналоговой вычислительной машине (АВМ).

Представим математические уравнения, описывающие систему, в виде блок-схемы для моделирования на АВМ.

Схема включает блоки интегрирования, умножения, сложения и т.д. Используемый метод решения состоит в последовательном интегрировании наивысших производных уравнения, получении всех производных низшего порядка и зависимых переменных. Блок-схема составляется из условия удовлетворения данному дифференциальному уравнению, т.е. производные умножаются на соответствующие коэффициенты и члены суммируются, образуя «замкнутую цепь».

Поясним составление блок-схемы на примере дифференциального уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_2 y = f(t).$$

Разрешая уравнение относительно старшей производной  $\frac{d^2 y}{dt^2}$ , полу-

чим

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -a_1 \frac{dy}{dt} - a_2 y + f(t).$$

Интегрируя  $\frac{d^2 y}{dt^2}$  дважды, получим  $\frac{dy}{dt}, y$ . Замкнутый контур образуется из условия удовлетворения дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -a_1 \frac{dy}{dt} - a_2 y + f(t).$$

Полученная схема, приведенная на рисунке 3.2, в сущности соответствует блок-схеме моделирования этой системы на АВМ.

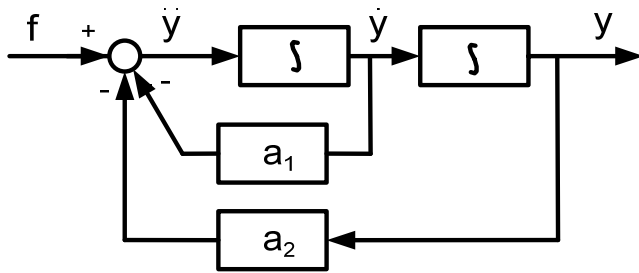


Рисунок 3.2 – Схема моделирования

Для решения дифференциального уравнения необходимо задать начальные условия

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_0}, y(t_0), \text{ т.е. определить начальные условия интеграторов, которые характеризуют состояние системы в любой момент времени.}$$

Запишем уравнения состояния системы, представленной на рисунке 3.2. В качестве переменных состояния примем выходы интеграторов.

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}.$$

Тогда:

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -a_1 x_2 - a_2 x_1 + f.$$

В матричной форме уравнение состояния системы записывается как

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot F,$$

$$Y = C \cdot X.$$

где  $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & a_1 \end{vmatrix}; B = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \end{vmatrix};$

$$\dot{X} = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{vmatrix}; F = \begin{vmatrix} 0 \\ f \end{vmatrix}; Y = \begin{vmatrix} y \\ 0 \end{vmatrix}.$$

*Пример.* Для системы с двумя входами и тремя выходами (структура системы представлена на рисунке 3.3) при

$$\varphi_1(p) = \frac{k_1}{(1 + \lambda_1 p)(1 + \lambda_2 p)}, \quad \varphi_2(p) = \frac{k_2}{(1 + \lambda_3 p)}, \quad \varphi_3(p) = \frac{k_3}{(1 + \lambda_4 p)},$$

$$\varphi_4(p) = \frac{k_4}{(1 + \lambda_5 p)}$$

уравнение в пространстве состояний записывается следующим образом.

Принимаем в качестве переменных состояния

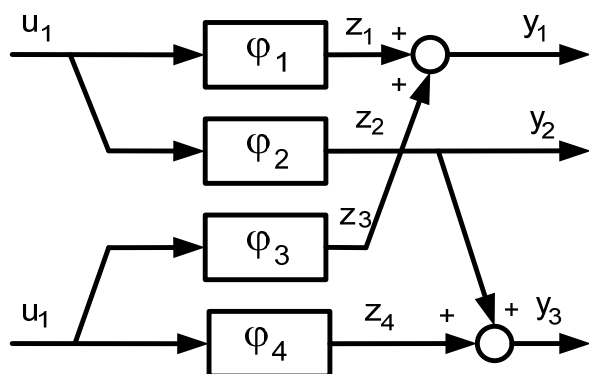


Рисунок 3.3 – Структурная схема САУ с двумя входами и тремя выходами

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1; & x_2 &= \dot{x}_1; \\ x_3 &= z_2; & x_4 &= z_3; \\ x_5 &= z_4; & x_6 &= \dot{x}_5. \end{aligned}$$

Тогда в матричной форме уравнение в пространстве состояния

$$\dot{X} = A \cdot X + B \cdot U,$$

$$Y = C \cdot X,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda_1 \lambda_2 & -(\lambda_1 + \lambda_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_1 & 0 \\ k_2 & 0 \\ 0 & k_3 \\ 0 & 0 \\ 0 & k_4 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

### 3.2. Матричные передаточные функции

Понятие передаточной функции, введенное ранее для линейных систем с постоянными параметрами и содержащими одну входную и одну выходную величину, легко распространить на более общий случай – для систем имеющих более одной входной или выходной величины. Передаточная функция  $\varphi_{ij}(s)$ , являющаяся передаточной функцией между  $j$ -ым входом и  $i$ -ым выходом, определяется

$$\varphi_{ij}(s) = \frac{Y_i(s)}{F_j(s)}.$$

Таблица из элементов  $\varphi_{ij}(s)$ , где первый индекс обозначает строку, а второй – столбец, называется матричной передаточной функцией.

*Пример.* Система с двумя входами и двумя выходами описывается дифференциальными уравнениями

$$\ddot{y}_1 + 5\dot{y}_1 + 6y_1 = \ddot{f}_1 + 3\dot{f}_1 + 4\dot{f}_2 + 8f_2,$$

$$\dot{y}_2 + y_2 = \dot{f}_1 + 2\dot{f}_2 + 2f_2.$$

Определить передаточную функцию и начертить блок-схему.

Запишем уравнения в операторной форме

$$(p^2 + 5p + 6)Y_1 = (p^2 + p)F_1 + 4(p + 2)F_2,$$

$$(p + 1)Y_2 = pF_1 + 2(p + 1)F_2.$$

или

$$Y_1 = \frac{p}{p + 2}F_1 + \frac{4}{p + 3}F_2$$

$$Y_2 = \frac{p}{p + 1}F_1 + 2F_2.$$

Тогда передаточная функция равна

$$G(p) = \begin{bmatrix} \varphi_{11}(p) & \varphi_{12}(p) \\ \varphi_{21}(p) & \varphi_{22}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{p}{p + 2} & \frac{4}{p + 3} \\ \frac{p}{p + 1} & 2 \end{bmatrix}.$$

Блок-схема, соответствующей передаточной функции, приведена на рисунке 3.4.

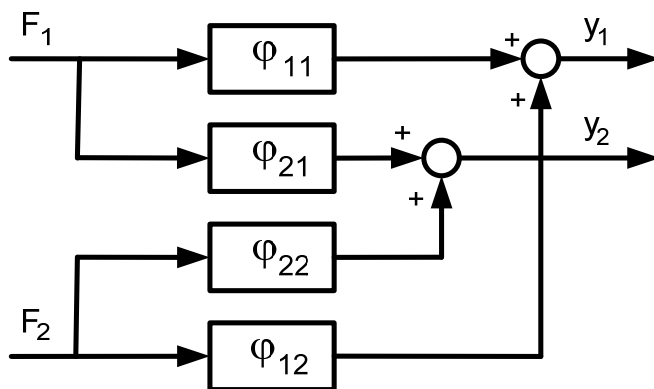


Рисунок 3.4 – Блок-схема САР с двумя входами и двумя выходами

### 3.3. Переходная матрица состояния

Однородное дифференциальное уравнение для линейной системы записывается записывается в векторной форме

$$\dot{X} = A \cdot X, \tag{49}$$

где  $A$  - матрица с постоянными коэффициентами размерности  $(n \times n)$ , вектор  $X$  - матрица столбец  $(n \times 1)$  состоящая из  $n$  векторов  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Подобно решению скалярных дифференциальных уравнений решение уравнения (49) представляется в виде

$$X(t) = e^{A(t-\tau)} X(\tau),$$

где матрица  $\varphi(t) = e^{A \cdot t}$  называется переходной матрицей состояния системы, описываемой уравнением (49). Переходная матрица состояния описывает движение конца вектора состояния в пространстве состояний из некоторого начального положения, а потому описывает и изменение (переход) состояния системы.

Необходимо отметить, что объем вычислений при определении переходной матрицы состояния обычно больше, чем при решении линейного дифференциального уравнения относительно зависимой переменной. Однако имеющаяся дополнительная информация позволяет проектировщику системы управления использовать более совершенные методы проектирования.

Вычисление переходной матрицы состояния может выполняться несколькими способами:

- на теореме Сильвестра;
- на методе Кэли – Гамильтона;
- разложением в бесконечный ряд;
- на методе частотной области;
- и т.д.

**Метод Кэли – Гамильтона.** Рассмотрим случай, когда степень матричного многочлена  $N(A)$  выше, чем порядок  $A$ . Разделив  $N(\lambda)$  на характеристический многочлен  $A$ , получим

$$\frac{N(\lambda)}{D(\lambda)} = Q(\lambda) + \frac{R(\lambda)}{D(\lambda)}, \quad (50)$$

где  $R(\lambda)$  - остаточный член. Умножив уравнение (50) на  $D(\lambda)$ , получим

$$N(\lambda) = Q(\lambda) \cdot D(\lambda) + R(\lambda). \quad (51)$$

При  $D(\lambda) = 0$  уравнение (51) превращается в

$$N(\lambda) = R(\lambda).$$

Соответственно, так как  $D(A) = [0]$ , то матричная функция  $N(A) = R(A)$

Распространим описанный метод на случай когда требуется определить  $F(A)$ , где  $F(\lambda)$  - аналитическая функция  $\lambda$  в окрестности начала координат. Если  $F(\lambda)$  является аналитической функцией в какой либо области. То она может быть в этой области в виде бесконечного сходящегося ряда по  $\lambda$ . Поэтому функция  $F(A)$  может быть представлена в виде многочлена от  $A$  степени  $n - 1$ . Следовательно, остаточный член  $R(\lambda)$  уравнения (51) дол-



жен быть многочленом степени  $n - 1$ . Из этого следует, что если  $Q(\lambda)$  - аналитическая функция в области, то

$$F(\lambda) = Q(\lambda) \cdot D(\lambda) + R(\lambda), \quad (52)$$

где  $D(\lambda)$  - характеристический многочлен  $A$ , а  $R(\lambda)$  - многочлен вида

$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1}. \quad (53)$$

Коэффициенты  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$  находятся путем последовательной подстановки  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  в уравнение (52). Учитывая, что  $D(\lambda_i) = 0$ , получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} F(\lambda_1) &= R(\lambda_1), \\ F(\lambda_2) &= R(\lambda_2), \\ \dots \\ F(\lambda_n) &= R(\lambda_n). \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Поскольку  $Q(\lambda)$  является аналитической в области аналитичности  $F(\lambda)$ , то область аналитичности содержит все характеристические числа матрицы  $A$  и вместо переменной  $\lambda$  можно подставить  $A$ . Тогда

$$F(A) = Q(A) \cdot D(A) + R(A).$$

Так как согласно теореме Кэли – Гамильтона  $Q(A) = [0]$ , то

$$F(A) = R(A).$$

Рассмотрим случай кратных характеристических корней. Если  $A$  содержит характеристический корень  $\lambda_i$  порядка  $r$ , то в результате подстановки в уравнение (52) получим одно линейно независимое уравнение. Остальные  $r - 1$  линейных уравнений, необходимых для нахождения  $\alpha_i$  определяются дифференцированием обеих частей уравнения (52)

$$\left. \frac{d^k F(\lambda)}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_i} = \left. \frac{d^k R(\lambda)}{d\lambda^k} \right|_{\lambda=\lambda_i}, k = 1, 2, \dots, r - 1.$$

*Пример.* Найти переходную матрицу состояния  $\varphi(t)$  если матрица  $A$  дифференциального уравнения имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения:  $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -2$ . Так как матрица  $A$  второго порядка, то многочлен  $R(\lambda)$  - первого порядка

$$R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda.$$

После подстановки  $\lambda_1 = -1; \lambda_2 = -2$  в уравнение (52) получим два линейных уравнения

$$\left. \begin{aligned} e^{-t} &= \alpha_0 - \alpha_1 \\ e^{-2t} &= \alpha_0 - 2\alpha_1 \end{aligned} \right\}.$$

Откуда

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= 2e^{-t} - e^{-2t} \\ \alpha_1 &= e^{-t} - e^{-2t} \end{aligned} \right\}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F(A) = e^{A \cdot t} &= \alpha_0 \cdot J + \alpha_1 A = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & -3\alpha_1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -(e^{-t} - 2e^{-2t}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

*Пример.* Определить  $e^{A \cdot t}$ , где  $A$  - матрица вида

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Матрица имеет два корня  $\lambda = 1$  и один корень  $\lambda = 2$ . Многочлен  $R(\lambda) = \alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2$ . Три уравнения относительно  $\alpha_i$  определяются из системы

$$\begin{bmatrix} e^t \\ te^t \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix},$$

откуда имеем

$$\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} e^t \\ te^t \\ e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу, используя теорему Кэли – Гамильтона. Характеристический многочлен матрицы  $C$  коэффициентов равен

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 4\lambda - 1 = 0.$$

Следовательно

$$C^3 - 6C^2 + 4C - 4J = [0], \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$C^{-1} = C^2 - 6C + 4J = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Поэтому

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= -2te^t + e^{2t} \\ \alpha_1 &= 2e^t + 3te^t - 2e^{2t} \\ \alpha_2 &= -e^t - te^t + e^{2t} \end{aligned} \right\}.$$

Следовательно  $e^{A \cdot t} = \alpha_0 J + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$ ,

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 6 & 0 & 2 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ и } A^2 = \begin{bmatrix} -9 & 6 & 14 \\ -10 & 10 & 26 \\ -8 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

В результате имеем

$$e^{A \cdot t} = \begin{bmatrix} 9e^t + 7te^t - 8e^{2t} & -4e^t - 3te^t + 4e^{2t} & -8e^t - 5te^t + 8e^{2t} \\ 22e^t + 28te^t - 22e^{2t} & -10e^t - 12te^t + 11e^{2t} & -22e^t - 20te^t + 22e^{2t} \\ -2e^t - 7te^t + 2e^{2t} & e^t + 3te^t - e^{2t} & 3e^t + 5te^t - 2e^{2t} \end{bmatrix}$$

*Примеры для самостоятельной работы.*

I. Записать матричную передаточную функцию и уравнение в пространстве состояний:

$$1. \quad \begin{cases} \ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_2 = f_1 \\ \ddot{y}_2 + \dot{y}_1 + y_2 = f_2 \end{cases}.$$

$$2. \quad \begin{cases} \dot{y}_1 + y_1 = f_1 + 2f_2 \\ \ddot{y}_2 + 3\dot{y}_2 + 2y_2 = f_1 + f_2 + \dot{f}_2 \end{cases}.$$

II. Определить переходную матрицу состояния. Матрица  $A$  :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

III. Нарисовать блок-схему моделирования уравнения

$$\ddot{y} + a\dot{y} + by = \dot{f} + f.$$

## Литература

1. Фельдбаум А.А. Методы теории автоматического регулирования / А.А. Фельдбаум, А.Г. Бутковский ; - М.: Наука, 1971.- 744с.
2. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием / Х. Гурецкий; -М.: Машиностроение, 1974.-327с.
3. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления / Е.П. Попов;- М.: Наука, 1988.- 255с.
4. Ротач В.Я. Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования / В.Я. Ротач;- М.: Энергия,1973.- 440с.
5. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем / Я.З. Цыпкин;- М.: Энергия.1977.-470с.
6. Остром К., Виттенмарк Б. Системы управления с ЭВМ / К. Остром, Б. Виттенмарк; Пер. с англ. Переводчики А.Н. Николаев, Т.С. Чеботарева. Под ред. С.П. Чеботарева. - М.: Мир.1987.-480с.
7. Иванов Н.И. Автоматизация производственных процессов в черной металлургии / Н.И. Иванов, Б.Н. Парсункин, В.М. Рябов;- М.: Металлургия, 1980.-304с.
8. Ли Т.Г. Управление процессами с помощью вычислительных машин. Моделирование и оптимизация / Т.Г. Ли, Г.Э. Адамс, У.М. Гейнз; Пер. с англ. Под ред. В.И. Мудрова. - М.: Советское радио, 1972.-312с.
9. Смит Джон М. Математическое и цифровое моделирование для инженеров и исследователей / Джон М. Смит; Пер. с англ. Н.П. Ильиной; Под ред. О.А. Чембровского; - М.: Машиностроение, 1980.-271с.
- 10.Александров А.Г. Синтез регуляторов многомерных систем / А.Г. Александров. - М.: Машиностроение, 1986.- 272с.
- 11.Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления: Под ред. А.В.Воронова, И.А.Орурка. – М.: Наука, 1984. – 344.

12. Емельянов С.В. Системы управления с переменной структурой / С.В.Емельянов, С.К.Коровин // Итоги науки и техники. Техническая кибернетика.-М., ВИНТИ.- 1980. –т.13, с.151-196.